前　言

自然界的运动和变化是有规律的，认识这些规律是自然科学的任务。而需用数量来描述这些规律时，往往需要引入坐标系，只有这样，才能把数学带到自然科学中去。然而，随之而来的问题是，本来与坐标系无关的自然规律，它的数学表达式不得不与坐标系的选择夹杂在一起，以至掩盖了原来事物的物理本质。

张量的引入恰是力图既采用坐标系又摆脱具体坐标系影响的一种尝试。使用张量，可以简化推导，使演算过程清晰，表达方式整齐统一。用张量描述的物理定律或几何定理，所得到的结果在任何坐标系下都具有不变形式，从而充分地反映了这些现象的物理或几何属性。张量所具有的高度概括、形式简洁的特点使得它在分析力学、固体力学、流体力学、几何学、电磁学和相对论等诸多领域获得了越来越广泛的应用。

时至今日，不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是很困难的，甚至是不可能的。正如 W. Flügge 所说，有了张量分析，研究连续介质力学就如鱼得水。

随着现代工程技术的发展，许多教师和科技工作者希望了解和熟悉张量分析的有关知识，为适应新形势的要求，近年来很多高等院校都为研究生和高年级本科生开设了“张量分析”课程。

考虑到本书的主要读者对象是工科的研究生和高年级本科生，因此我们着重阐明张量的基本概念和基本运算规律，并在最常用的三维欧氏空间中进行讨论。列举较多的应用实例也是为了使读者在理解张量的物理意义时，不致在抽象的理论面前感到困惑。当然，为了突出张量理论的严密性，我们对一些重要的定理和公式也给出了较为详细的推导。

本书是作者在多年的研究生教学实践基础上，参阅了大量的同类教材，为加强我校研究生教材建设的需要而编写的。作者力图编写出一本内容翔实，语言准确鲜明，密切联系工程力学的通俗易懂的研究生教材。

本书的第一、二、六章由朱卫兵编写；第三、四、五章由张耀良编写，最后由张耀良统一修改定稿；张晓斌和刘浩参加了收集资料和初稿的打字校对工作，并负责了插图的绘制，为书稿的顺利完成付出了辛勤的劳动，在此表示衷心的感谢！

梁立孚、王振清两位教授在百忙中认真、仔细地审阅了全部书稿，提出了许多具体的修改意见，纠正了初稿中的不少疏误之处。他们对研究生教材建设的负责态度令我们感动，使我们获益匪浅，在此表示我们诚挚的谢意。

限于编者水平和时间紧迫，虽数易其稿，但书中的缺点和错误在所难免，诚恳希望有关专家和读者批评指正。

编　者

2004 年 9 月

目　录

1 矢量与张量

1.1 概　　述

任一物理现象都是按照一定的客观规律进行的，它们是不以人们的意志为转移的。但是，在研究分析这一物理现象时，人们采用的方法则是由人们的意愿决定的。无数事实说明，研究方法的选用与当时人们对客观事物的认识水平有关，而研究方法的好坏直接关系到求解问题的繁简程度。

在数学和物理学中，我们常常会遇到一些几何量和物理量，它们都与坐标系的选取无关。其中有一些比较简单的量，如平面图形的面积，一有限物体的体积和温度等，这些量仅用它们的量值（加上相应的单位）就能够描述，例如可以用立方米来表示体积，某时刻的温度可用摄氏温标的度数来表示。这种用量值就能表征的量，通常称为**标量**。当然，我们还会碰到比标量复杂一些的量，如位移、力、速度和加速度等，它们不能单用数值来描述，因为这些量不仅有量值，而且有方向，如一个气象预报员预报某天的风速时，他不仅应当说明风的速率（风速的量值），而且应当说明风吹的方向，这样才能完整地加以描述。这种必须用量值和方向来表征的量，称为**矢量**。在三维空间中，可以用标明方向的线段（即有向线段）来表示这些物理量。习惯上常常用粗体小写字母，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 等表示矢量。本书中把这种表示方法称为**不变性记法**（或称**抽象记法**、**绝对记法**等）。所谓"不变"一词，意味着它与坐标系的选取无关，也就是说，它并不因坐标系的改变而发生变化。

在处理具体问题时，我们常常需要选定坐标系，这样就会带来很多方便。在三维欧氏空间中，通常采用正交笛卡尔坐标系 $oxyz$。这样，一个矢量就可以写成三个分矢量之和，如

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

式中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是沿坐标轴正向的单位矢量；a_x，a_y，a_z 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，在本书中把它们称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于坐标系 $oxyz$ 的分量，或简称为分量。

显然，矢量的分量与坐标系有关，即当选取不同坐标系时，将得到不同的分量。虽然如此，我们也自然可以想到，同一矢量在不同坐标系下得到的不同分量之间一定有着某种联系，也就是说一定可以通过坐标系之间的变换关系而找到它们之间的联系，于是，我们也可以用满足一定坐标变换关系的三个有序数来定义矢量，称每个数为矢量的分量。

随着科学技术的不断发展，我们遇到了比矢量更为复杂的几何量和物理量，对它们的描述就不能只用量值和方向，而必须应用更多的概念。如固体中一点由于内力而产生的应力，我们必须确定力和力所作用的面。另外，还有弹性体中任一体积元的形变以及转动惯量等，这样的量只能用所谓**张量**的数学实体来描述。以后我们还将看到，前面所述的标量和矢量实际上都是张量的特例。

张量的概念是在 19 世纪由高斯（Gauss）、黎曼（Riemann）、克里斯托弗尔（Christoffel）等人在发展微分几何过程中引入的。在此基础上，1887 ~ 1901 年间，李奇（Ricci）和他的学生勒维・奇维塔（Levi Civita）发展了张量分析，虽然他们也曾介绍过张量的某些应用，但很少有

人注意。直到 1916 年爱因斯坦(Einstein) 用黎曼几何与张量分析来阐述他的广义相对论,才给张量这一纯数学理论以丰富的物理内容,使张量分析在物理学中占有突出的地位。自 20 世纪 40 年代开始,张量分析逐步成为研究连续介质力学的有效工具,时至今日,不熟悉张量分析的人在阅读连续介质力学的文献时会感到相当困难。由此可见,张量分析不仅在数学领域内占有一席之地,更重要的是它在现代物理和力学的研究中已成为一种不可或缺的重要工具。

与矢量一样,张量也是一个与坐标系的选取无关而客观存在的量,而且可以把它视为矢量的发展和推广。因此,张量也有不变性记法和分量记法(也叫指标记法) 两种表示法。前面已经说过,在三维欧氏空间中,矢量可以用一个有方向的线段简明直观地表示出来,可是对于张量(如应力、应变、转动惯量等) 却办不到,也就是说,单纯通过不变性记法来认识张量是有困难的。那么怎样来表示一个张量呢?我们仍然需借助于坐标系,把张量的不变性记法用形式上有点像矢量式(1.1.1) 的方式来表示。在本书中这将作为张量的定义。于是也能得到一组有序数,称为**张量的分量**。显然,与矢量的分量一样,在不同坐标系中,张量的分量也是不相同的,但同一张量在不同坐标系中的不同分量之间也可以通过坐标变换关系而找到它们之间的联系。于是,我们同样用满足一定坐标变换关系的一组有序数来定义张量,这种定义法称为**指标记法**。以后我们还将看到,一旦定义了 n 阶张量后,就会发现前面我们提到的标量和矢量实际上也属于张量的范畴,它们分别代表零阶张量和一阶张量。

大多数初学者对于由矢量到一般张量的转变会感到突然,以致产生一定的困难,因此有必要对矢量作出进一步的讨论,这有助于读者在学习一般张量之前,掌握关于张量的某些知识。也就是说,下面将对矢量的表达方式逐渐与对张量的表达方式统一起来。

1.2 矢量及其运算

1.2.1 矢量

在三维欧氏空间中,矢量是具有大小和方向且满足一定规则的实体,用黑体字母表示,例如 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 等。它们所对应矢量的大小(称为模、值) 分别用 $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ 表示。称模为零的矢量为**零矢量**,用 $\boldsymbol{0}$ 表示。称与矢量 $\boldsymbol{u}$ 的模相等而方向相反的矢量为 $\boldsymbol{u}$ 的负矢量,用 $-\boldsymbol{u}$ 表示。矢量满足以下规则。

1. 相等

两个矢量具有相同的模和方向,则称这两个矢量相等。即一个矢量做平行于其自身的移动则这个矢量不变。

2. 矢量和

按照平行四边形法则定义矢量和,同一空间中两个矢量之和仍是该空间的矢量,如图1-1所示。

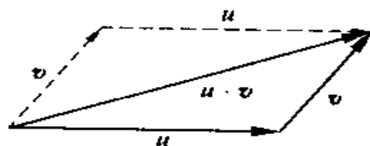


图 1-1 矢量和的平行四边形法则

矢量和满足以下规则。

交换律
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \tag{1.2.1}$$

结合律
$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \tag{1.2.2}$$

由矢量和负矢量还可以定义矢量差

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) \tag{1.2.3}$$

并且有

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \tag{1.2.4}$$

3. 数乘矢量

设 a,b 等为实数,矢量 $\boldsymbol{u}$ 乘实数 a 仍是同一空间的矢量,记做 $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}$。其含义是:$\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{u}$ 共线且模为 $\boldsymbol{u}$ 的 a 倍,当 a 为正值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 同向;a 为负值时 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 反向;a 为零时 $\boldsymbol{v}$ 为零矢量。数乘矢量满足以下规则。

分配律

$$(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u} \tag{1.2.5a}$$

$$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \tag{1.2.5b}$$

结合律

$$a(b\boldsymbol{u}) = ab\boldsymbol{u} \tag{1.2.6}$$

由矢量关于求和与数乘两种运算规则可知,属于同一空间的矢量组 $\boldsymbol{u}_i$($i = 1,2,\cdots,n$)的线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i$ 仍为该空间的矢量,此处 a_i 是实数。矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$ **线性相关**是指存在一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$$

线性无关:若有矢量组 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n$,当且仅当 $a_i = 0$($i = 1,2,\cdots,n$)时,才有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{u}_i = 0$$

则称这组 n 个矢量是**线性无关**的。

维数:一个矢量空间所包含的最大线性无关矢量的数目称为该矢量空间的**维数**。显然,三维空间最多有3个线性无关的矢量,平面最多有2个线性无关的矢量。在 n 维空间中,可以根据解决物理问题的需要选择 n 个线性无关的矢量,而任一矢量可用这 n 个矢量的线性组合来表示。

在三维空间的笛卡尔坐标系中,任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1.2.7}$$

式中,$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 为沿 x,y,z 轴正向的单位矢量。

1.2.2 矢量的点积

定义两个矢量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的点积为

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) \tag{1.2.8}$$

式中,$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角,如图1-2所示,如果 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_f$ 和 $\boldsymbol{e}_v$,则由式(1.2.8)可知,$\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影是 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_v$,而 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 上的投影是 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_f$,所以

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_v) = |\boldsymbol{F}|(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_f)$$

在三维空间的笛卡尔坐标系 xyz 中也可以写成

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \tag{1.2.9}$$

当 $\boldsymbol{F}$ 表示力,$\boldsymbol{v}$ 表示速度时,$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ 表示功率。

两个矢量的点积服从以下规则。

交换律

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \tag{1.2.10}$$

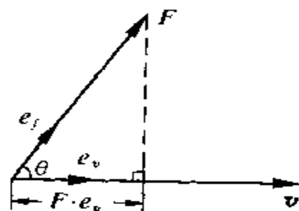


图1-2 两个矢量的点积

分配律
$$\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.2.11}$$

正定性
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0 \tag{1.2.12}$$

且仅当 $\boldsymbol{u}=0$ 时,有
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$$

Schwartz 不等式
$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \tag{1.2.13}$$

1.2.3 矢量的叉积

两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积(也称矢积)是垂直于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 构成的平面的另一个矢量 $\boldsymbol{w}$。定义
$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} \tag{1.2.14}$$

$\boldsymbol{w}$ 为垂直于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 所在平面的矢量,其方向符合右手法则,如图 1 - 3 所示。

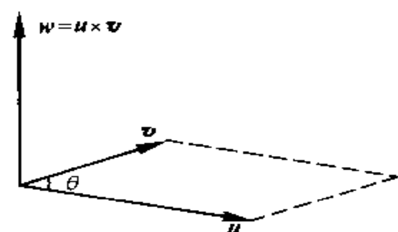


图 1 - 3　两个矢量的叉积

叉积的模为
$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{1.2.15}$$

式中,$\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant 0$。交换叉积的顺序,则叉积反号
$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} \tag{1.2.16}$$

叉积也满足分配律
$$\boldsymbol{F}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{v} \tag{1.2.17}$$

叉积的物理意义是:其模等于以两个矢量为边构成的平行四边形的面积,其方向垂直于该平行四边形所在平面。

三个矢量的二重叉积满足以下恒等式
$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \tag{1.2.18}$$

这个公式的证明可见后面的例 1.8。另外,由上式也可证叉积不满足结合律
$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\neq(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$$

1.2.4 矢量的混合积

定义三个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的混合积是
$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}]&=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\\ &=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

若更换三个矢量在混合积中的次序,应满足
$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}]&=[\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{w}\quad\boldsymbol{u}]=[\boldsymbol{w}\quad\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{v}]=-[\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{w}]\\ &=-[\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{w}\quad\boldsymbol{v}]=-[\boldsymbol{w}\quad\boldsymbol{v}\quad\boldsymbol{u}]\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

这就是混合积的轮换性。另外,可以证明混合积的物理意义是以 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。式(1.2.19) 与式(1.2.20) 还决定了当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 构成右手系时,该平行六面体的体积为正号。

利用式(1.2.9) 和式(1.2.19) 还可以证明,由三个矢量的两两点积所构成的行列式等于

三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}]^2 \tag{1.2.21}$$

实际上它是式(1.2.19) 中两个行列式的乘积。

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}' \quad \boldsymbol{v}' \quad \boldsymbol{w}'] \tag{1.2.22}$$

式中，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'$ 都是任意矢量。

例 1.1 利用矢量方法求证平面几何中的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

证明 用矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示三角形的三条边 BC,CA,BA；A,B,C 表示三角形的三个顶角，如图 1－4 所示，则

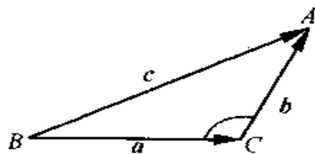


图 1－4 平面几何中的余弦定理

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - C) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

例 1.2 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕定轴转动的刚体上的每一点都绕着该轴做圆周运动，单位时间内转动的角度为 ω。求用矢量叉积表示刚体上任一点的线速度 $\boldsymbol{v}$。

解 将坐标原点 o 设在旋转轴上，由 o 点至 P 点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以描述刚体上任一点 P 的位置。用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度，其大小等于 ω，方向沿旋转轴且与旋转方向之间满足右手法则。P 点到定轴的距离为 d，如图 1－5 所示。

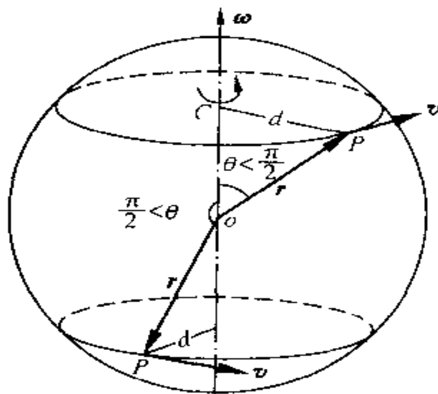


图 1－5 绕定轴转动的刚体

过 P 点作垂直于定轴的平面，与轴交点为 C，则 P 点做该平面内绕 C 的圆周运动，速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向为 P 点处沿该圆周的切线方向。即

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0 \quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} = 0 \quad (\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小为 ωd

$$|\boldsymbol{v}| = \omega d = \omega r\sin\theta$$

因此

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

1.3 斜角直线坐标系

为了便于定量求解某个物理问题,人们常需要选择不同的坐标系描述物理量及其遵循的客观规律。除了大家都熟悉的笛卡尔坐标系外,还可以选择非正交的或非直线坐标系,本节介绍更具一般意义的坐标系以及矢量与张量的非笛卡尔分量。

1.3.1 平面内的斜角直线坐标系

图1-6表示平面内直线坐标系 x^1x^2(其中 x 右上角的数字代表上标,而不是幂次,以区别不同的坐标。幂次用括号给出,如$(a_ix^i)^2$),x^1 和 x^2 互不正交,夹角为 $\varphi(\varphi<\pi)$,若选沿 x^1 与 x^2 的参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$(它们可以不是单位矢量),则任意矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以用它对$\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 分解的分矢量 $P^1\boldsymbol{g}_1$ 与 $P^2\boldsymbol{g}_2$ 之和来表示。即

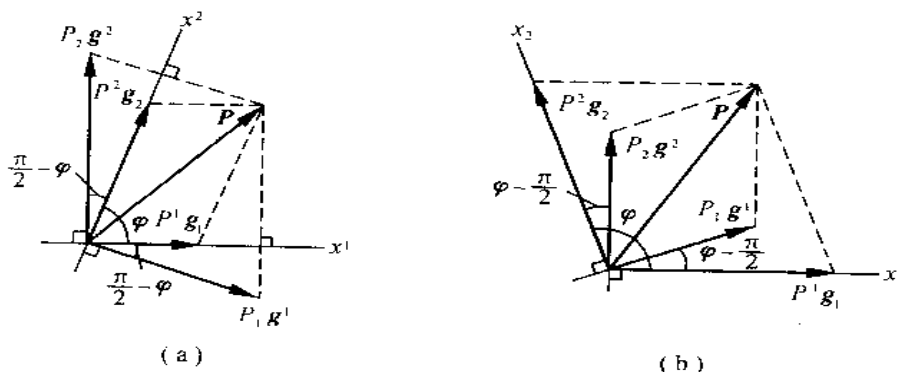


图1-6 平面内的斜角直线坐标系

$$\boldsymbol{P}=P^1\boldsymbol{g}_1+P^2\boldsymbol{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha \tag{1.3.1}$$

式中,P^1 与 P^2 称为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量。上式中最后的表达式省略了求和号,即采用了**爱因斯坦(Einstein)求和约定**。其中 α 称为**哑指标**,它满足以下规则。

哑指标规则

(1) 在同一项中,以一个上指标与一个下指标成对地出现(在直角笛卡尔坐标系中不分上下指标,一律取下标,以后将会说明),表示在其取值范围内求和(对于二维,从1至2求和;对于三维,从1至3求和)。

(2) 每一对哑指标的字母可以用相同取值范围的另一对字母任意代换,其意义不变。如

$$\boldsymbol{P}=P^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=P^\beta\boldsymbol{g}_\beta \tag{1.3.1a}$$

对于爱因斯坦求和约定,一定要分清式中的哑指标和自由指标,如在直角笛卡尔坐标系中

$$a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

而 $a_ib_j - a_jb_i$ 中没有哑指标，故不包含任何求和运算。它表示共有九个式子。即

$$c_{ij} = a_ib_j - a_jb_i \quad (i = 1,2,3)$$

可写成

$$c_{11} = a_1b_1 - a_1b_1$$
$$c_{12} = a_1b_2 - a_2b_1$$
$$c_{13} = a_1b_3 - a_3b_1$$
$$\cdots$$

又如 $a_{ij}b_{ik}$ 中 i 为哑指标，j,k 为自由指标，它表示共有九个式子

$$c_{jk} = a_{1j}b_{1k} + a_{2j}b_{2k} + a_{3j}b_{3k} \quad (j,k = 1,2,3)$$

所以有

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33}$$
$$\cdots$$

当选定参考矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 后，自然可以确定任意矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量 P^1 和 P^2。若引入沿 x^1 和 x^2 的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$ 和 $\boldsymbol{i}_2$，则有

$$\boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{i}_2 = 1, \qquad \boldsymbol{i}_1 \cdot \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_2 \cdot \boldsymbol{i}_1 = \cos\varphi \neq 0 \tag{1.3.2a}$$

$$\boldsymbol{g}_1 = |\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 = |\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2 \tag{1.3.2b}$$

与笛卡尔坐标系不同，因 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 不是单位矢量且不正交，故矢量 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2)$ 上的投影不等于它的分量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{i}_1 &= (P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2) \cdot \boldsymbol{i}_1 = (P^1|\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1 + P^2|\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2) \cdot \boldsymbol{i}_1 \\ &= P^1|\boldsymbol{g}_1| + P^2|\boldsymbol{g}_2|\cos\varphi\end{aligned} \tag{1.3.3a}$$

同理

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{i}_2 = P^1|\boldsymbol{g}_1|\cos\varphi + P^2|\boldsymbol{g}_2| \tag{1.3.3b}$$

矢量 $\boldsymbol{P}$ 的分量 P^1 和 P^2 需通过式(1.3.3)联立求解得到，显然这样做是很不方便的。为此，我们引入一对与 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2)$ 对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\alpha(\alpha = 1,2,)$，满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 0 \\ \boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1\end{cases} \tag{1.3.4}$$

上式表明 $\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 分别互相正交，由图 1－6 可以看出，$\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 的夹角都是锐角，为 $\frac{\pi}{2} - \varphi$（当 φ 为锐角时）或 $\varphi - \frac{\pi}{2}$（φ 为钝角时），故

$$|\boldsymbol{g}^1| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi}, \qquad |\boldsymbol{g}^2| = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.3.5}$$

称参考矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha(\alpha = 1,2,)$ 为**协变基矢量**，称与其对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\beta(\beta = 1,2)$ 为**逆变基矢量**。它们之间满足的关系式式(1.3.4)可以写成**对偶条件**：

$$\boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{1.3.6}$$

式中，δ_α^β 称为 **Kronecker** 符号，其值为

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases}1, & 当\ \alpha = \beta \\ 0, & 当\ \alpha \neq \beta\end{cases} \tag{1.3.7}$$

由式(1.3.6) 可以从协变基矢量惟一地确定逆变基矢量，反之亦然。今后对于每个坐标系都将引入这两组互为对偶的基矢量。利用它们的对偶关系式(1.3.6) 就可以方便地求矢量的分量，而不再需要求解方程组式(1.3.3)。如式(1.3.1) 中的矢量对协变基矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 分解的分量 P^α(称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量**)：

$$P^1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^1, \qquad P^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^2$$

或统一写成

$$P^\alpha = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^\alpha \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.3.8}$$

同样，矢量 $\boldsymbol{P}$ 还可以对逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^\beta$ 分解为

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2 = P_\beta\boldsymbol{g}^\beta \quad (\beta = 1,2) \tag{1.3.9}$$

P_β 称为**矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变矢量**。利用对偶关系式(1.3.6) 可以很方便地得到矢量的协变分量

$$P_\alpha = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha \quad (\alpha = 1,2) \tag{1.3.10}$$

引入了协变基矢量和逆变基矢量，我们还可以方便地得到关于两个矢量点积的表达式。如有两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{P} = P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2 = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2$$
$$\boldsymbol{u} = u^1\boldsymbol{g}_1 + u^2\boldsymbol{g}_2 = u_1\boldsymbol{g}^1 + u_2\boldsymbol{g}^2$$

则两个矢量的点积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} &= (P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2)\cdot(u_1\boldsymbol{g}^1 + u_2\boldsymbol{g}^2)\\ &= P^1u_1 + P^2u_2 = P^\alpha u_\alpha \quad (\alpha = 1,2)\end{aligned}$$

或写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} &= (P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2)\cdot(u^1\boldsymbol{g}_1 + u^2\boldsymbol{g}_2)\\ &= P_1u^1 + P_2u^2 = P_\alpha u^\alpha \quad (\alpha = 1,2)\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P} = P^\alpha u_\alpha = P_\alpha u^\alpha \tag{1.3.11}$$

在式(1.3.6)、式(1.3.8) 和式(1.3.10) 中出现的指标符号称为**自由指标**。它满足以下规则。

(1) 一个指标在表达式的各项中都在同一水平上出现，并且只出现一次，即全为上标或全为下标。表示该表达式在自由指标的 n 维取值范围内都成立，即它代表了 n 个表达式。

(2) 一个表达式中的某个自由指标可以全体地换用相同取值范围的其他字母，其意义不变。

本小节中定义的哑指标、自由指标及指标符号规则同样适用于三维问题，并且贯穿于全书。

1.3.2 三维空间中的斜角直线坐标系

上述在二维情形下的做法完全可以推广到三维空间中，设 $x^1x^2x^3$ 为三维空间斜角直线坐标系，沿各坐标轴正向选取参考矢量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$(它们不一定是单位矢量) 组成协变基矢量，在这组基矢量下，任一个矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{P} = P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2 + P^3\boldsymbol{g}_3 = \sum_{i=1}^{3}P^i\boldsymbol{g}_i = P^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.3.12}$$

式中，P^i 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量。

再根据对偶条件引入一组逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$,其对偶条件可以写作

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j = \begin{cases}1, & i = j\\0, & i \neq j\end{cases} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{1.3.13}$$

在逆变基矢量下,任一矢量 $\boldsymbol{P}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{P} = P_1\boldsymbol{g}^1 + P_2\boldsymbol{g}^2 + P_3\boldsymbol{g}^3 = \sum_{i=1}^{3} P_i\boldsymbol{g}^i = P_i\boldsymbol{g}^i \tag{1.3.14}$$

式中,P_i 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量。

很显然

$$P_i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_i \tag{1.3.15}$$

$$P^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^i \tag{1.3.16}$$

上两式说明,协变分量是矢量 $\boldsymbol{P}$ 与协变基矢量的点积,而逆变分量是矢量 $\boldsymbol{P}$ 与逆变基矢量的点积。

两个矢量的点积也可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P} &= P^1u_1 + P^2u_2 + P^3u_3 = \sum_{i=1}^{3} P^iu_i = P^iu_i\\ &= P_1u^1 + P_2u^2 + P_3u^3 = \sum_{i=1}^{3} P_iu^i = P_iu^i\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

值得指出,本书中讨论的矢量是自由矢量,即与矢量的作用点无关。这就是说,无论作用在哪一点,都可以按协变基矢量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 或逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 分解。由于这个缘故,我们常常说这组基矢量是**整体的**。

1.4 曲线坐标系

1.4.1 曲线坐标系

许多物理问题的求解往往离不开除笛卡尔坐标系外的其他坐标系,如平面极坐标系、空间圆柱坐标系和球坐标系等,这些坐标系可以统称为**曲线坐标系**。

设空间任一点由三个独立参数 $x^i(i = 1,2,3)$ 所确定,则这些参数就构成曲线坐标系。曲线坐标的选择可以不是长度的量纲。当三个参数中两个保持不变,只有一个变化时,点的轨迹曲线称为该坐标系的**坐标线**,通过空间点必有三根坐标线。不同点处坐标线的方向一般是变化的。而当三个参数中一个保持不变时,则其余两个参数变化而成的空间点的集合就构成**坐标面**,通过空间任意点必有 3 个坐标面,一般情况下,3 个坐标面都是曲面。

例如,图 1-7 所示的球坐标系 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$,其中 x^2,x^3 都不是长度的量纲。空间任意点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r} = x^1\sin x^2\cos x^3\boldsymbol{i} + x^1\sin x^2\sin x^3\boldsymbol{j} + x^1\cos x^2\boldsymbol{k}$$

$$(0 < x^1 < \infty, 0 \leqslant x^2 \leqslant \pi, 0 \leqslant x^3 \leqslant 2\pi)$$

x^1 坐标线是通过坐标原点的射线,x^2 坐标线是通过 z 轴的大圆(经线),x^3 坐标线是平行于 oxy 平面的圆(纬线)。x^1 坐标面是一个球面,x^2 坐标面是一个锥面,x^3 坐标面是一半平面。

1.4.2 空间点的局部基矢量

设 $x^i(i=1,2,3)$ 为三维空间的曲线坐标系，则空间任意点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 是坐标的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3) \tag{1.4.2}$$

考察从 P 点出发的微线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，写成矢量微分形式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.4.3}$$

现在定义坐标微分的矢量因子为**协变基矢量**，记做 $\boldsymbol{g}_i(i=1,2,3)$，即

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.4.4}$$

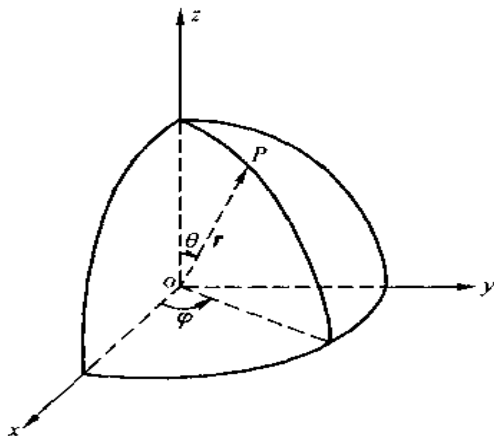


图 1－7 球坐标系

这样，式(1.4.3) 就可以写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i \tag{1.4.5}$$

取定了协变基矢量后就可按式(1.3.6) 定义逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i(i=1,2,3)$，即

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j \tag{1.4.6}$$

显然，按式(1.4.3) 定义的协变基矢量包括了直线坐标系中关于基矢量的定义。事实上任一直线坐标系的矢径都是 $\boldsymbol{r}=x^i\boldsymbol{g}^i$，其微分式为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i$(因为直线坐标系中的 $\boldsymbol{g}_i$ 不变)，所以与现在所讨论的曲线坐标系中的情况完全一致。

值得强调的是，一般曲线坐标系的基矢量与点的位置有关，在不同的点处，基矢量是不同的。因此，把矢量分解时应考虑到矢量的作用点，只有按作用点处的基矢量进行分解才是有意义的。也就是说，曲线坐标系不是整体的。我们把这种协变基矢量和逆变基矢量称为**局部的(或当地的)**。

仍以球坐标系为例，由式(1.4.1) 可以得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}=\sin x^2\cos x^3\boldsymbol{i}+\sin x^2\sin x^3\boldsymbol{j}+\cos x^2\boldsymbol{k}, & |\boldsymbol{g}_1|&=1\\
\boldsymbol{g}_2&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}=x^1(\cos x^2\cos x^3\boldsymbol{i}+\cos x^2\sin x^3\boldsymbol{j}-\sin x^2\boldsymbol{k}), & |\boldsymbol{g}_2|&=x^1\\
\boldsymbol{g}_3&=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}=x^1\sin x^2(-\sin x^3\boldsymbol{i}+\cos x^3\boldsymbol{j}), & |\boldsymbol{g}_3|&=x^1\sin x^2
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

从此例可见，3 个协变基矢量中仅 $\boldsymbol{g}_1$ 是单位矢量，但其方向随点变化；$\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 的大小与方向都随点变化，且不是无量纲的，它们具有长度的量纲。

对空间中一任意矢量 $\boldsymbol{P}$，按其作用点关于局部协变基矢量和局部逆变基矢量分解，也可以写成如下的形式，即

$$\boldsymbol{P}=P^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.4.8}$$

$$\boldsymbol{P}=P_i\boldsymbol{g}^i \tag{1.4.9}$$

仍然把 P^i 称为 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量，P_i 称为 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量，且有

$$P^i=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^i$$

$$P^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_i \tag{1.4.10}$$

作用在同一点处的两个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的点积,仍然可以写成

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P} = P_i u^i = P^i u_i \tag{1.4.11}$$

最后讨论一下协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 的几何意义。

由式(1.4.5)可以看出,当取 $\mathrm{d}x^1 \neq 0$,而 $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$ 时,$\boldsymbol{g}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 重合。由于 $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0$ 意味着坐标 x^2 和 x^3 不变,而只有 x^1 在变化,因此,这时的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 必与 x^1 坐标线相合;且因为 $\mathrm{d}x^1$ 是个无穷小量,因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 x^1 坐标线的切线重合。这就是说 $\boldsymbol{g}_1$ 沿着 x^1 坐标线的切线,并且朝着 x^1 坐标增大的方向。同理可知 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 分别沿着 x^2 坐标线和 x^3 坐标线的切线,并且朝着 x^2 坐标和 x^3 坐标增大的方向。

关于逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$,由定义式(1.4.6)可知,如对于 $\boldsymbol{g}^1$ 矢量,它必垂直于 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$。由于一点处的 x^2 坐标线和 x^3 坐标线都在 x^1 坐标为常数的坐标面内,因此这一点处的 $\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 都在该点处 x^1 为常数的坐标面上,也就是说 $\boldsymbol{g}^1$ 就是该坐标面的法线方向,又因为 $\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1$,即 $\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 的夹角为锐角,所以 $\boldsymbol{g}^1$ 矢量应当指向 x^1 坐标增大的一侧。

1.5 坐标变换

描述同一空间的物理问题,可以根据需要选择各种不同的坐标系,同一个物理量在不同坐标系中往往以不同的分量加以定量描述。那么同一个物理量的这些不同分量之间有什么关系呢?

考虑两组坐标系:"老"坐标系 x^i;"新"坐标系 $x^{i'}$。它们之间的函数关系为

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = x^i(x^{j'}) \tag{1.5.1a}$$

或者

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) = x^{i'}(x^j) \tag{1.5.1b}$$

我们说式(1.5.1a)或式(1.5.1b)决定了坐标变换。上述公式右端的函数,我们假定它们在所讨论的区域内为单值连续的,并且具有需要的各阶连续导数。除此之外,还要求满足雅克比(Jacobian)行列式

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right| \neq 0 \quad 或 \quad \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right| \neq 0$$

1.5.1 基矢量的转换关系

设老坐标系的协变基矢量和逆变基矢量是 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$;新坐标系的协变基矢量和逆变基矢量是 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$。将新坐标系的基矢量按老坐标系的基矢量分解,有

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^j \boldsymbol{g}_j \quad (i' = 1', 2', 3') \tag{1.5.2}$$

$$\boldsymbol{g}^{i'} = \beta_j^{i'} \boldsymbol{g}^j \quad (i' = 1', 2', 3') \tag{1.5.3}$$

上两式中,$\beta_{i'}^j$ 称为**协变转换系数**,$\beta_j^{i'}$ 称为**逆变转换系数**,各有9个,可各自排列成 3×3 矩阵。协变转换系数 $\beta_{i'}^j$ 和逆变转换系数 $\beta_j^{i'}$ 其实并不独立,这是因为协变基矢量和逆变基矢量必须满足对偶条件

$$\delta_{i'}^{j'} = \boldsymbol{g}_{i'} \cdot \boldsymbol{g}^{j'} = \beta_{i'}^k \boldsymbol{g}_k \cdot \beta_l^{j'} \boldsymbol{g}^l = \beta_{i'}^k \beta_l^{j'} \delta_k^l = \beta_{i'}^k \beta_k^{j'} \quad (i', j' = 1', 2', 3') \tag{1.5.4a}$$

上式表示由协变转换系数和逆变转换系数组成的矩阵互逆，即

$$\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.4b}$$

如果老坐标系的基矢量按新坐标系的基矢量分解，那么同样有

$$\boldsymbol{g}_i = \beta_i^{j'} \boldsymbol{g}_{j'} \quad (i = 1,2,3) \tag{1.5.5}$$

$$\boldsymbol{g}^i = \beta_{j'}^{i} \boldsymbol{g}^{j'} \quad (i = 1,2,3) \tag{1.5.6}$$

且有

$$\delta_i^j = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \beta_i^{k'} \boldsymbol{g}_{k'} \cdot \beta_{l'}^{j} \boldsymbol{g}^{l'} = \beta_i^{k'} \beta_{l'}^{j} \delta_{k'}^{l'} = \beta_i^{k'} \beta_{k'}^{j} \tag{1.5.7a}$$

上式表示协变与逆变转换关系的另一种矩阵互逆关系

$$\begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.7b}$$

事实上，根据互逆矩阵的性质可知，把式(1.5.4b)左端两个矩阵交换一下后等式仍成立，即得式(1.5.7b)。并且协变基与逆变基矢量之间共有 18 个坐标转换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 与 $\beta_{j}^{i'}$，它们相互之间满足矩阵互逆关系，所以独立的只有 9 个。

另外，从基矢量的变换公式式(1.5.2)、式(1.5.3)、式(1.5.5)和式(1.5.6)中，我们可以清楚地看到**指标结构的规律：哑指标上下各出现一次，而自由指标始终出现在同一水平上（即同是上标或同是下标）**。掌握了这个规律，可立即写出各变换关系式。以后我们将看到，在整个张量分析中，无不体现了这个规律。

1.5.2 协变与逆变转换系数

由新老坐标之间的函数关系与基矢量的定义，可以求得协变与逆变转换系数。

假设新老坐标系具有同一个坐标原点，则空间任一点的矢径为 $\boldsymbol{r}$。根据协变基矢量的定义

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$$

而

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}$$

由于新老坐标之间的变换关系由式(1.5.1a)或式(1.5.1b)给出，利用复合函数的求导法则

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{g}_j$$

而按式(1.5.2)知新老协变基矢量之间的变换关系为

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j} \boldsymbol{g}_j$$

比较以上两式，就可得

$$\beta_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \tag{1.5.8}$$

同理可得

$$\beta_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \tag{1.5.9}$$

因此同样有

$$g^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} g^j$$

1.5.3 矢量分量的坐标转换关系

现在考察任意矢量 $\boldsymbol{v}$，设它在老坐标系下表示为

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v_i \boldsymbol{g}^i \tag{1.5.10}$$

在新坐标系下表示为

$$\boldsymbol{v} = v^{i'} \boldsymbol{g}_{i'} = v_{i'} \boldsymbol{g}^{i'} \tag{1.5.11}$$

现在来找矢量 $\boldsymbol{v}$ 的新分量与对应老分量之间的关系，利用式(1.5.6)

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i = v_i \beta_{k'}^i \boldsymbol{g}^{k'} = v_{k'} \boldsymbol{g}^{k'}$$

用 $\boldsymbol{g}_{j'}$ 点乘最后一个等式的两边，即得

$$v_{j'} = \beta_{j'}^i v_i \tag{1.5.12}$$

同理，可以导出两组逆变分量之间的关系

$$v^{j'} = \beta_i^{j'} v^i \tag{1.5.13}$$

式(1.5.12)中是由协变转换系数 $\beta_{j'}^i$ 进行转换的，这时，我们说这种变换方式具有**协变性**；而式(1.5.13)中是由逆变转换系数 $\beta_i^{j'}$ 进行转换的，我们说这种转换方式具有**逆变性**。这也是协变分量和逆变分量名称的由来。

要把矢量 $\boldsymbol{v}$ 的老分量用相应的新分量表示时，不难证明它们满足如下的关系式

$$v_i = \beta_i^{j'} v_{j'} \tag{1.5.14}$$

$$v^i = \beta_{j'}^i v^{j'} \tag{1.5.15}$$

当然，它们也符合我们前面所述的指标结构规律。

例 1.3 已知坐标变换为

$$x^{1'} = x^1 + 2x^2 - x^3$$

$$x^{2'} = 2x^1 + x^2 + 3x^3$$

$$x^{3'} = x^1 + x^2 + x^3$$

式中，x^i 表示直角笛卡尔坐标系，$x^{i'}$ 为斜角直线坐标系。设直角笛卡尔坐标系的基矢量为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，求斜角直线坐标系的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{i'}$。

解 直角笛卡尔坐标系的协变基矢量和逆变基矢量是相同的，都为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$。

根据式(1.5.9)和已知条件，可得

$$\beta_1^{1'} = 1 \quad \beta_2^{1'} = 2 \quad \beta_3^{1'} = -1$$

$$\beta_1^{2'} = 2 \quad \beta_2^{2'} = 1 \quad \beta_3^{2'} = 3$$

$$\beta_1^{3'} = 1 \quad \beta_2^{3'} = 1 \quad \beta_3^{3'} = 1$$

则由式(1.5.3)得

$$\boldsymbol{g}^{i'} = \beta_j^{i'} \boldsymbol{g}^j$$

所以

$$g^{1'} = \beta_1^{1'} g^1 + \beta_2^{1'} g^2 + \beta_3^{1'} g^3 = i + 2j - k$$
$$g^{2'} = \beta_1^{2'} g^1 + \beta_2^{2'} g^2 + \beta_3^{2'} g^3 = 2i + j + 3k$$
$$g^{3'} = \beta_1^{3'} g^1 + \beta_2^{3'} g^2 + \beta_3^{3'} g^3 = i + j + k$$

再来求 $g_{i'}$，根据对偶条件 $g_{i'} \cdot g^{j'} = \delta_{i'}^{j'}$，设

$$g_{1'} = ai + bj + ck$$

则有

$$\begin{cases} g_{1'} \cdot g^{1'} = 1 \\ g_{1'} \cdot g^{2'} = 0, \\ g_{1'} \cdot g^{3'} = 0 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} a + 2b - c = 1 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

解之得

$$a = 2, b = -1, c = -1$$

所以

$$g_{1'} = 2i - j - k$$

同理可得

$$g_{2'} = 3i - 2j - k$$
$$g_{3'} = -7i + 5j + 3k$$

当然也可以将式(1.5.4b)写成矩阵的形式，然后用求逆阵的方法解出 $\beta_{i'}^{j}$ 来，再根据式(1.5.2)求出协变基矢量来，读者可自行解算。

1.6 并矢和并矢式

1.6.1 并矢

现在推广矢量的概念。任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 并写在一起，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**并矢**，记做 $\boldsymbol{ab}$。它表示把两个矢量进行并乘运算。有的书中也称它为两个矢量的**张量积**。几个并矢的线性组合称为**二重矢**，如 $c_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都是常数，它是一个二重矢。

此外，还可以定义多于两个矢量的并矢，称之为**多并矢**。如 $\boldsymbol{abc}$，$\boldsymbol{abcd}$ 等分别称为三阶与四阶并矢。

除交换律外，并乘运算服从初等代数的运算规律：

结合律

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{ab}) &= (m\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(m\boldsymbol{b}) = m\boldsymbol{ab} \\ (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{abc} \\ (m\boldsymbol{a})(n\boldsymbol{b}) &= mn(\boldsymbol{ab}) \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

分配律

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc} \\ m(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}) &= m\boldsymbol{ab} + m\boldsymbol{cd} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) &= \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd} \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

上面的 $m, n \in \mathbf{R}$。

不适合交换律，即

$$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba} \tag{1.6.3}$$

所以并矢中各矢量的排列顺序不能随意调换。

求和　两个相同的并矢可以求和，而求和时服从交换律。如

$$2\boldsymbol{ab} + 3\boldsymbol{ab} = 3\boldsymbol{ab} + 2\boldsymbol{ab} = 5\boldsymbol{ab} \tag{1.6.4}$$

1.6.2　并矢的缩并

在并矢中，取某两个矢量进行点积，称之为**缩并**。每缩并一次，并矢的阶数降低两阶。如四阶并矢 $\boldsymbol{abcd}$ 的缩并可以有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{bcd} &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{cd} \\ \boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{cd} &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{ad} \\ \boldsymbol{abc} \cdot \boldsymbol{d} &= (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{ab} \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

$$\overset{\sqcap}{\boldsymbol{abcd}} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{bc}$$

等多种形式。以上各式右端括号内的点积是一个数，所以它们降为二阶并矢，二阶并矢缩并后就成为一个数，一个数可视为零阶并矢。

1.6.3　并矢的点积与双点积

两个并矢的点积是指将它们相邻的两个矢量进行缩并，如

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{ab}) &= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \\ (\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{a} \\ (\boldsymbol{ab}) \cdot (\boldsymbol{cd}) &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{ad} \\ (\boldsymbol{cd}) \cdot (\boldsymbol{ab}) &= (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{cb} \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

由此可见，并矢点积的次序是不可交换的，即

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{u} &\neq \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{ab}) \\ (\boldsymbol{cd}) \cdot (\boldsymbol{ab}) &\neq (\boldsymbol{ab}) \cdot (\boldsymbol{cd}) \end{aligned}$$

因为进行缩并的两个相邻矢量改变了。比较式(1.6.6) 的第三式和式(1.6.5) 的第二式可知

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot (\boldsymbol{cd}) = \boldsymbol{ab} \cdot \boldsymbol{cd} \tag{1.6.7}$$

两个并矢的双点积是指把它们最邻近的 4 个矢量两两缩并。有两种双点积的形式。

并联式

$$\boldsymbol{ab} : \boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{1.6.8}$$

即按(前 · 前)(后 · 后) 的形式进行两两缩并；

串联式

$$\boldsymbol{ab} \cdot\cdot\, \boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{1.6.9}$$

即按(内 · 内)(外 · 外) 的形式进行两两缩并。两个二阶并矢的双点积为一个数。

1.6.4　并基

当引进了坐标系后，就可确定协变基矢量和逆变基矢量。这时任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都有两种基展开式

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i = a_i \boldsymbol{g}^i$$

$$\boldsymbol{b} = b^j \boldsymbol{g}_j = b_j \boldsymbol{g}^j$$

根据并乘所满足的运算规律，可知并矢 $\boldsymbol{ab}$ 有如下四种表达式：

$$\boldsymbol{ab} = (a^i \boldsymbol{g}_i)(b^j \boldsymbol{g}_j) = a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \tag{1.6.10a}$$

$$\boldsymbol{ab} = (a^i \boldsymbol{g}_i)(b_j \boldsymbol{g}^j) = a^i b_j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j \tag{1.6.10b}$$

$$\boldsymbol{ab} = (a_i \boldsymbol{g}^i)(b^j \boldsymbol{g}_j) = a_i b^j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \tag{1.6.10c}$$

$$\boldsymbol{ab} = (a_i \boldsymbol{g}^i)(b_j \boldsymbol{g}^j) = a_i b_j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \tag{1.6.10d}$$

由于协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i(i = 1,2,3)$ 是线性无关的，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i(i = 1,2,3)$ 也是线性无关的，所以 $\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$(一一列出是 $\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^3,\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3,\boldsymbol{g}^3\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^3\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3\boldsymbol{g}^3$，共有 9 个，下同）是 9 个线性无关的并矢，称为**并基**。同理，9 个并矢 $\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$，9 个并矢 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 和 9 个并矢 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 都各自构成一组线性无关的并矢，也都称为并基。这样，任意两个矢量的并矢可按这四组并基展开，把 a^ib^j，a^ib_j，a_ib^j 和 a_ib_j 分别称为并矢 $\boldsymbol{ab}$ 关于并基 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ 的**分量**。

这里要注意，对于并矢 $\boldsymbol{ab}$ 来说，每组 9 个分量都是不独立的。比如说 a^ib^j，它是由 3 个 a^i 和 3 个 b^j 两两相乘而得的，即 9 个分量 a^ib^j 是由 6 个量 a^i 和 b^j 决定的，因此是不独立的。

1.7 张量的基本概念

1.7.1 矢量的分量记法和不变性记法

在阐明张量的概念之前，作为张量的一个特例，首先进一步阐述一下矢量的概念。在 1.1 节和 1.2 节中，我们已经给出了矢量的一般定义。矢量是个与坐标系无关的量，可用小写黑体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 等，这种表示形式叫做**不变性记法**（或**抽象记法**、**绝对记法**、**实体记法**等），它体现了矢量的原始意义。

一旦引进了坐标系，就可按式(1.4.4)定义协变基矢量，然后按式(1.4.6)定义逆变基矢量，当然这组基是局部的，即跟空间点的位置有关。于是，作用在某点处的矢量 $\boldsymbol{v}$ 就可按该点处的基矢量分解成

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v_i \boldsymbol{g}^i$$

并称此式为**矢量 $\boldsymbol{v}$ 关于协变基 $\boldsymbol{g}_i$（或逆变基 $\boldsymbol{g}^i$）的展开式**，统称为**基展开式**。显然，基展开式在任何坐标系下都是可行的。

当取定了坐标系后，任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 的逆变分量 v^i 和协变分量 v_i 就完全确定了。并且，当坐标变换时，在任何其他坐标系中的两类分量可以通过变换关系式(1.5.12)、式(1.5.13)完全确定。由此可见，一旦给定一个矢量在某一坐标系中的任何一组分量，这个矢量就完全确定了。也就是说，矢量和它的任一组分量是完全等价的。因此，我们可用分量的观点来重新定义矢量。

如果在三维空间中任意点处的物理量对每个坐标系都可以用 3 个有序数 v_1，v_2，v_3（或另外 3 个有序数 v^1，v^2，v^3）来表示，且当坐标变换时，它们在新坐标系中的 3 个有序数 $v_{i'}$（或 $v^{i'}$）满足如下用协变转换系数（或逆变转换系数）来实现的变换关系

$$v_{i'} = \beta_{i'}^{j} v_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} v_j$$

或

$$v^{i'} = \beta_j^{i'} v^j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} v^j$$

则上述物理量称为**矢量** $\boldsymbol{v}$，记做 v_i（或 v^i），其中每个量 v_i（或 v^i）称为**协变分量**（**或逆变分量**）。

以上方法定义的矢量叫做矢量的**分量记法**（**或称指标记法**）。这样，我们表示矢量时就有三种等价记法：矢量 $\boldsymbol{v}$，矢量 v_i，矢量 v^i，它们实际上都代表同一矢量。用基矢量展开式即可把这三种记法写成等式

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i = v^i \boldsymbol{g}_i = v_{i'} \boldsymbol{g}^{i'} = v^{i'} \boldsymbol{g}_{i'}$$

在这里，我们之所以不厌其烦地介绍矢量的不变性记法、分量记法以及基矢量展开式，完全是为了与即将引进的张量的定义相对照，以使读者较为容易地接受张量这个新概念。

1.7.2 张量的定义

与矢量的定义相类似，我们给出张量的定义，并且从二阶张量开始讨论，然后推广至更高阶的张量。

一个几何量或物理量 $\boldsymbol{T}$，如果在所取的坐标系 x^i 下（它的协变基为 $\boldsymbol{g}_i$，逆变基为 $\boldsymbol{g}^i$）可以写成

$$\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \tag{1.7.1a}$$

或写成

$$\boldsymbol{T} = T^{i}{}_{\cdot j} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j \tag{1.7.1b}$$

$$\boldsymbol{T} = T_{i}{}^{\cdot j} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \tag{1.7.1c}$$

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \tag{1.7.1d}$$

则此量 $\boldsymbol{T}$ 称为**二阶张量**，T^{ij} 称为 $\boldsymbol{T}$ 的**逆变分量**；T_{ij} 称为 $\boldsymbol{T}$ 的**协变分量**；$T^{i}{}_{\cdot j}$ 和 $T_{i}{}^{\cdot j}$ 称为 $\boldsymbol{T}$ 的**混变分量**，上下指标的空位处用小圆点标识，是为了确切地表示指标的前后顺序。式(1.7.1)称为 $\boldsymbol{T}$ 关于坐标系的并基展开式。记号“$\boldsymbol{T}$”就是该二阶张量的**不变性记法**。今后，我们总用黑体大写的拉丁字母或希腊字母表示张量的不变性记法。

由上述定义可以看出，每个二阶张量有 $2^2 = 4$ 组分量，即一组逆变分量，一组协变分量和两组混变分量。而每组有 $3^2 = 9$ 个分量。各组分量不仅与坐标系的选取有关，还与点的位置有关。也就是说，同一个二阶张量在不同空间位置或不同坐标系下，每组分量一般是不相同的。

进一步考察二阶张量的分量在坐标系下的变化规律。设 $x^{i'}$ 为新坐标系，其新的协变基为 $\boldsymbol{g}_{i'}$，新的逆变基为 $\boldsymbol{g}^{i'}$，它们与老坐标系 x^i 下的协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 和逆变基 $\boldsymbol{g}^i$ 的关系由式(1.5.2)、(1.5.3) 或式(1.5.5)、式(1.5.6) 确定。在新坐标系 $x^{i'}$ 中，二阶张量也可写成

$$\boldsymbol{T} = T^{i'j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'} = T^{i'}{}_{\cdot j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}^{j'} = T_{i'}{}^{\cdot j'} \boldsymbol{g}^{i'} \boldsymbol{g}_{j'} = T_{i'j'} \boldsymbol{g}^{i'} \boldsymbol{g}^{j'} \tag{1.7.2}$$

由式(1.5.5)，对于逆变分量

$$\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j = T^{ij} \beta_i^{i'} \boldsymbol{g}_{i'} \beta_j^{j'} \boldsymbol{g}_{j'} = T^{ij} \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'}$$

而由二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的不变性保证，也可以写成

$$T = T^{i'j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'}$$

比较两式就可得到

$$T^{i'j'} = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} T^{ij} \qquad (1.7.3a)$$

上式表明，把逆变分量 T^{ij} 变到新坐标系中去时，需要乘两次逆变系数，即具有二重逆变性，这就是把 T^{ij} 称为逆变分量的原因。

同理可证

$$T^{i'}_{\cdot j'} = \beta_i^{i'} \beta_{j'}^{j} T^{i}_{\cdot j} \qquad (1.7.3b)$$

$$T_{i'}^{\cdot j'} = \beta_{i'}^{i} \beta_j^{j'} T_i^{\cdot j} \qquad (1.7.3c)$$

上两式中都出现了一个逆变系数和一个协变系数，这就是把 $T^{i}_{\cdot j}$ 和 $T_i^{\cdot j}$ 称为混变分量的原因。

也可证明

$$T_{i'j'} = \beta_{i'}^{i} \beta_{j'}^{j} T_{ij} \qquad (1.7.3d)$$

上式中出现了两个协变系数，即具有二重协变性，故把 T_{ij} 称为协变分量。

综上所述，任意二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 对每个坐标系都可写成式(1.7.1)的四种形式，并且当坐标变换时，新坐标系中的四组分量可以通过变换公式(1.7.3)分别由老坐标系中的相应分量完全确定。由此可见，二阶张量和其中任何一组分量是完全等价的。

1.7.3 张量的分量记法

仿照矢量，我们也可以从分量的观点给出张量的定义。

如果在三维空间任意点处的几何量和物理量对于每个坐标系都可以用 9 个有序数 T^{ij}（或者另外三组各 9 个有序数 $T^{i}_{\cdot j}, T_i^{\cdot j}, T_{ij}$）来表示，当坐标变换时它们在新坐标系中的 9 个有序数 $T^{i'j'}$（或 $T^{i'}_{\cdot j'}, T_{i'}^{\cdot j'}, T_{i'j'}$）由变换公式(1.7.3a)（或式(1.7.3b)，(1.7.3c)，(1.7.3d)）所确定，则上述几何量或物理量称为**二阶张量**，记做 T^{ij}（或 $T^{i}_{\cdot j}, T_i^{\cdot j}, T_{ij}$），其中每组量 T^{ij}（或 $T^{i}_{\cdot j}, T_i^{\cdot j}, T_{ij}$）称为**逆变分量**（或**混变分量**、**协变分量**）。

以上方法定义的二阶张量叫做**二阶张量的分量记法**（或称**指标记法**）。从今以后我们表示一个二阶张量时就有五种等价的记法，即不变性记法 $\boldsymbol{T}$ 和四种分量记法 $T^{ij}, T^{i}_{\cdot j}, T_i^{\cdot j}, T_{ij}$。当知道了分量记法时，只需乘上相应的并基，即按照并基展开式(1.7.1)就可写出 $\boldsymbol{T}$。

当然，对于新老坐标系中分量的转换关系，我们也可以写出反演形式，即

$$T^{ij} = \beta_{i'}^{i} \beta_{j'}^{j} T^{i'j'} \qquad (1.7.4a)$$

$$T^{i}_{\cdot j} = \beta_{i'}^{i} \beta_j^{j'} T^{i'}_{\cdot j'} \qquad (1.7.4b)$$

$$T_i^{\cdot j} = \beta_i^{i'} \beta_{j'}^{j} T_{i'}^{\cdot j'} \qquad (1.7.4c)$$

$$T_{ij} = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} T_{i'j'} \qquad (1.7.4d)$$

需要指出的是，矢量的不变性记法可以用一有向线段来简单直观地描述。但是，对于一个二阶张量却难以用几何特性来描述。因此，要认识一个物理量是否是二阶张量，一般总是由分量记法来判别。

1.7.4 张量定义的推广

我们在前面已经讨论了二阶张量的定义，下面就可以由此推广，给出 n 阶张量的定义。

如果一个几何量或物理量 $\boldsymbol{\Phi}$，在所取的坐标系 x^i 下（以 $\boldsymbol{g}_i$ 为协变基，以 $\boldsymbol{g}^i$ 为逆变基），

可以写成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi} &= \phi^{\overbrace{ij\cdots k}^{n}}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\cdots\boldsymbol{g}_k \\
&= \phi^{\overbrace{i\cdots j}^{r}}{}_{\underbrace{k\cdots l}_{s}}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l \\
&= \phi_{\underbrace{ij\cdots k}_{n}}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\cdots\boldsymbol{g}^k
\end{aligned}
\tag{1.7.5}
$$

则称此量 $\boldsymbol{\Phi}$ 为 **n 阶张量**(其中 n 为指标个数,$r+s=n$),$\phi^{ij\cdots k}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于坐标系 x^i 的**逆变分量**,$\phi_{ij\cdots k}$ 称为**协变分量**,$\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$ 称为**混变分量**(注意,混变分量不止这一种形式,在前面 r 个指标中,也允许出现下标,在后面 s 个指标中,同样允许出现上标)。式(1.7.5) 称为 n 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于坐标系的并基展开式。

一个 n 阶张量共有 2^n 组分量,其中一组为逆变分量,一组为协变分量,另外还有 2^n-2 组混变分量,而每组有 3^n 个分量。

例如,一个三阶张量 $\boldsymbol{P}$,它的逆变分量为 $P^{ijk}(i,j,k=1,2,3)$ 共有 27 个分量;协变分量为 $P_{ijk}(i,j,k=1,2,3)$ 也有 27 个分量;另有六组混变分量 $P^{i}{}_{\cdot jk}$,$P_{i}{}^{\cdot j}{}_{\cdot k}$,$P_{ij}{}^{\cdot\cdot k}$,$P_{i}{}^{\cdot jk}$,$P^{i}{}_{\cdot j}{}^{\cdot k}$ 和 $P^{ij}{}_{\cdot\cdot k}$,每组也有 27 个分量。

在定义 n 阶张量时,我们是指 $n>2$ 的情形。但事实上当 $n=2$ 时也成立,这由前面对二阶张量的讨论便知。再进一步,对于 $n=1$ 的情形,此时张量的基矢量就是协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$,分量也只有逆变分量和协变分量两种,而不出现混变分量,这其实就是矢量。因此,我们说一阶张量就是矢量。至于当 $n=0$ 时,就是一个标量,它是张量的特例,所以说零阶张量就是标量。这样,我们就把标量和矢量都纳入了张量的范畴。

同前面对二阶张量的讨论一样,我们也可以讨论 $n(n>2)$ 阶张量的各组分量在坐标变换下的规律。设新坐标系 $x^{i'}$ 下的协变基和逆变基分别为 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$,根据基矢量的变换关系式(1.5.2)、(1.5.3) 或反演公式(1.5.5)、(1.5.6)。很容易证明逆变分量满足 n 重逆变性质,即

$$
\phi^{i'j'\cdots k'} = \beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\cdots\beta^{k'}_{k}\phi^{ij\cdots k}
\tag{1.7.6a}
$$

协变分量满足 n 重协变性质,即

$$
\phi_{i'j'\cdots k'} = \beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}\cdots\beta^{k}_{k'}\phi_{ij\cdots k}
\tag{1.7.6b}
$$

对于所有混变分量,也同样满足 n 重混变性质,即

$$
\phi^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'} = \beta^{i'}_{i}\cdots\beta^{j'}_{j}\beta^{k}_{k'}\cdots\beta^{l}_{l'}\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}
\tag{1.7.6c}
$$

我们也可以从分量的观点来定义 n 阶张量。

如果在三维空间任意点处的物理量或几何量对于每个坐标系都可以用 3^n 个有序数 $\phi^{ij\cdots k}$(或另外各组 3^n 个有序数 $\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$,$\phi_{ij\cdots k}$ 等)来表示,当坐标变换时,它们在新坐标系中的值 $\phi^{i'j'\cdots k'}$(或 $\phi^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'}$,$\phi_{i'j'\cdots k'}$ 等)由变换公式(1.7.6a)(或(1.7.6c)、(1.7.6b) 等)完全确定,其中每组量 $\phi^{ij\cdots k}$(或 $\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}$,$\phi_{ij\cdots k}$)称为**逆变分量**(或**混变分量**,**协变分量**)。

以上定义的 n 阶张量叫做 **n 阶张量的分量记法**。同样可以用分量记法称呼一个 n 阶张量。当知道了分量记法后,只要乘上相应的并基就可以按照式(1.7.5) 写出该张量的不变性记法。

同样地,我们也可以写出式(1.7.6) 的反演形式,它们是

$$
\phi^{ij\cdots k} = \beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}\cdots\beta^{k}_{k'}\phi^{i'j'\cdots k'}
\tag{1.7.7a}
$$

$$
\phi_{ij\cdots k} = \beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\cdots\beta^{k'}_{k}\phi_{i'j'\cdots k'}
\tag{1.7.7b}
$$

$$\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l} = \beta_{i'}^{i}\cdots\beta_{j'}^{j}\beta_{k}^{k'}\cdots\beta_{l}^{l'}\phi^{i'\cdots j'}{}_{k'\cdots l'} \tag{1.7.7c}$$

从以上的分析，我们看到要识别一个张量的阶数，只要看它的分量记法中有几个自由指标，自由指标的数目就是该张量的阶数。

1.8 度量张量

在明确了张量的概念之后，下面我们就要介绍几个在张量分析中很常用很重要的张量。

1.8.1 度量张量

每当取定坐标系 x^i，就能按式(1.4.4)定义局部协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$，再按式(1.4.6)确定局部逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。于是在空间每一点处，都有两组基矢量，即 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$。当把协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 按逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 分解时，就可得到一组很重要的量。即

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \tag{1.8.1a}$$

则得9个量 $g^{ij}(i,j=1,2,3)$。同样地，当把逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 按协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 分解时，也可以得到一组同样重要的量。即

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \tag{1.8.1b}$$

则又得到9个量 $g^{ij}(i,j=1,2,3)$。

对式(1.8.1a)两边点积 $\boldsymbol{g}_j$，则可得

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j \tag{1.8.2a}$$

同理，也可得

$$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j \tag{1.8.2b}$$

通常我们也以式(1.8.2a)和式(1.8.2b)分别作为 g_{ij} 和 g_{ij} 的定义。

由矢量点积的可交换性，易知

$$g_{ij} = g_{ji},\ g^{ij} = g^{ji} \tag{1.8.3}$$

再考虑协变基矢量和逆变基矢量之间的对偶条件式(1.4.6)，可知

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$$

另一方面，我们也可由式(1.8.1a)和式(1.8.2b)得到

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j = (g_{ik}\boldsymbol{g}^k)\cdot\boldsymbol{g}^j = g_{ik}(\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^j) = g_{ik}g^{kj}$$

比较上面两式，就有

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j \tag{1.8.4}$$

式(1.8.4)反映了9个量 g_{ik} 与另外9个量 g^{kj} 之间的关系。如果已知 $g_{ik}(i,k=1,2,3)$，就能由此式解出 $g^{kj}(k,j=1,2,3)$ 并且解是惟一的；反之亦然。事实上，式(1.8.4)表明，由 g_{ik} 和 g^{kj} 构成的两个三阶对称方阵是互逆的。

那么，对于每个坐标系，根据式(1.8.2a)和式(1.8.2b)分别得到的9个量 g_{ij} 和9个量 g^{ij}，究竟是个什么量呢？下面我们证明 g_{ij} 是个二阶张量，它满足双重协变性；而 g^{ij} 也是个二阶张量，且满足双重逆变性。而且还要证明，它们代表的是同一个二阶张量，g_{ij} 和 g^{ij} 分别是该二阶张量的协变分量和逆变分量。

考虑在新坐标系 $x^{i'}$ 下的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{i'}$，新老坐标系之间基矢量的变换公式仍为式(1.5.2)、(1.5.3) 和反演公式(1.5.5)、(1.5.6)。所以

$$g_{i'j'} = \boldsymbol{g}_{i'} \cdot \boldsymbol{g}_{j'} = (\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i) \cdot (\beta_{j'}^{j}\boldsymbol{g}_j) = \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$$

由式(1.8.2a) 便可得

$$g_{i'j'} = \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}g_{ij} \tag{1.8.5a}$$

上式表明 g_{ij} 满足双重协变性，从而 g_{ij} 代表一个二阶张量。同样地

$$g^{i'j'} = \boldsymbol{g}^{i'} \cdot \boldsymbol{g}^{j'} = (\beta_{i}^{i'}\boldsymbol{g}^i) \cdot (\beta_{j}^{j'}\boldsymbol{g}^j) = \beta_{i}^{i'}\beta_{j}^{j'}\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j$$

由式(1.8.2b)，便可得

$$g^{i'j'} = \beta_{i}^{i'}\beta_{j}^{j'}g^{ij} \tag{1.8.5b}$$

上式表明 g^{ij} 满足双重逆变性，从而 g^{ij} 也代表一个二阶张量。

剩下的问题是要证明 g_{ij} 和 g^{ij} 代表的是同一个二阶张量。为此，我们要用张量的不变性记法。设 g_{ij} 的不变性记法为 $\boldsymbol{G}$，由式(1.7.1d)，有

$$\boldsymbol{G} = g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{1.8.6a}$$

把上式中的逆变基矢量用协变基矢量来表示，即由式(1.8.1b) 和(1.8.4)，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= g_{ij}(g^{ik}\boldsymbol{g}_k)(g^{jl}\boldsymbol{g}_l) = g_{ij}g^{ik}g^{jl}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l \\ &= \delta_j^k g^{jl}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l = g^{kl}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l\end{aligned}$$

由于 k,l 是哑指标，所以上式也可写成

$$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j \tag{1.8.6b}$$

这正好是二阶张量 g^{ij} 的并基展开式，说明 g^{ij} 的不变性记法也为 $\boldsymbol{G}$，这样就证明了 g_{ij} 和 g^{ij} 的确表示的是同一个张量。通常把这个张量称为**度量张量**，用符号 $\boldsymbol{G}$ 表示。g_{ij} 就是 $\boldsymbol{G}$ 的协变分量，而 g^{ij} 就是 $\boldsymbol{G}$ 的逆变分量。

度量张量 $\boldsymbol{G}$ 除了有协变分量和逆变分量外，还应有两种混变分量，事实上，由

$$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = g^{ij}\boldsymbol{g}_i(g_{jk}\boldsymbol{g}^k) = g^{ij}g_{jk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k = \delta_k^i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k$$

则可得度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的一种混变分量为

$$g^{i}_{\cdot j} = \delta_j^i \tag{1.8.7a}$$

由

$$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = g^{ij}(g_{ik}\boldsymbol{g}^k)\boldsymbol{g}_j = g^{ij}g_{ik}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_j = \delta_k^j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_j$$

则可得度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的另一种混变分量为

$$g_{i}^{\cdot j} = \delta_i^j \tag{1.8.7b}$$

这表明，度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的两种混变分量其实就是 Kronecker δ，于是 $\boldsymbol{G}$ 的四种并基展开式可以完整地写成

$$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \delta_j^i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = \delta_i^j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{1.8.8}$$

由 Kronecker δ 的定义，上式也可简写为

$$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{1.8.9}$$

那么，我们为什么把 $\boldsymbol{G}$ 叫做度量张量呢？为此，来考察一下空间一点处的线元长度。由式(1.4.5) 知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i) \cdot (\boldsymbol{g}_j\mathrm{d}x^j) = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

所以

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.8.10}$$

该式把线元的真实长度同坐标的增量联系起来了,从而建立了在该坐标系 x^i 下空间每一点处的长度度量。正是由于这个缘故,我们把 $\boldsymbol{G}$ 叫做度量张量。由式(1.8.10)还可以看出,只有当 $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ 时,这个二次型才为零,否则,这个二次型恒大于零,即是正定的。

1.8.2 指标的升降

研究度量张量之所以重要,其中一个很主要的原因是通过它可以实现张量不同分量之间的转换,即可以升降张量的指标。

对于一个矢量 $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{g}^i = v^i\boldsymbol{g}_i$,利用式(1.8.1b)可以写出

$$\boldsymbol{v} = v_j\boldsymbol{g}^j = v_j g^{ji}\boldsymbol{g}_i$$

比较上面两个式子的最后一个等式,并利用式(1.8.3)就可以得

$$v^i = g^{ij}v_j \tag{1.8.11a}$$

上式意味着,如果已知 $\boldsymbol{v}$ 的协变分量,则可利用 g^{ij} 算出 $\boldsymbol{v}$ 的逆变分量,从指标的角度看,即把本来是用下标表示的量,通过度量张量 g^{ij} 转化为用上标表示的量。我们把这一运算称为**指标的上升**,简称**升标**。

类似地,利用式(1.8.1a)也容易得到

$$v_i = g_{ij}v^j \tag{1.8.11b}$$

即把本来用上标表示的量,通过度量张量 g_{ij} 转化为用下标表示的量,这一运算称为**指标的下降**,简称**降标**。

根据这一思路,利用式(1.8.1a)和(1.8.1b)作用于张量的并基展开式,就可同样得到二阶张量、三阶张量以至任意阶张量的各组不同分量之间的指标升降关系。指标升降的规律是:总是用度量张量的逆变分量 g^{ij} 升标,把欲升标的那个指标写成哑指标,相应的自由指标出现在 g^{ij} 上标中的一个(g^{ij} 的另一个指标就是哑指标),再按求和约定进行运算;降标时,总是用度量张量的协变分量 g_{ij},把欲降标的那个指标写成哑指标,相应的自由指标出现在 g_{ij} 下标中的一个(g_{ij} 的另一个指标也是哑指标),然后再按求和约定进行运算。

例如,欲使 T_{ij} 的第一个指标上升,则可根据指标升降规律写出

$$T^{i}_{\cdot j} = g^{ik}T_{kj} \tag{1.8.12}$$

把上升了的第一个指标再下降,则有

$$T_{ij} = g_{il}T^{l}_{\cdot j} = g_{il}g^{lk}T_{kj} = \delta^k_i T_{kj} = T_{ij}$$

上式说明了把升标了的指标再降标,仍可得到原来的张量分量 T_{ij}。还可以把 T_{ij} 的两个指标同时上升而得到 T^{ij},且

$$T^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl} \tag{1.8.13}$$

不难证明,先把 T_{ij} 的第一个指标上升,再把第二个指标上升,与两个指标同时上升,其所得结果是完全一样的。

同样地,欲使 T^{ij} 的第一个指标下降,则可写出

$$T_{i}^{\cdot j} = g_{ik}T^{kj} \tag{1.8.14}$$

把下降了的第一个指标再上升,则有

$$T^{ij} = g^{il}T_{l}^{\cdot j} = g^{il}g_{lk}T^{kj} = \delta^i_k T^{kj} = T^{ij}$$

上式说明,若把下降了的指标再上升,仍可得到原来的张量分量 T^{ij}。同样,也可把 T^{ij} 的两个

指标都下降而得到协变分量，即

$$T_{ij} = g_{ik}g_{jl}T^{kl} \tag{1.8.15}$$

不难证明，先把 T^{ij} 的第一个指标下降，再下降第二个指标，其所得结果是完全一样的。

指标的升降规律说明，如果已经知道了一个张量的一组分量，则可利用度量张量来算出该张量的其他各组分量。

如果某个张量在一个坐标系中的某组分量全为零，那么由指标的升降规律可知，该张量在此坐标系下的其他各组分量也全为零。而且对任何坐标系，该张量的每组分量也一定全为零。我们把这种张量称为**零张量**，记为 **0**。

1.9 置换张量(Eddington 张量)

下面我们再继续介绍在张量分析中具有重要地位的置换张量(Eddington 张量)。

1.9.1 基矢量的混合积

由协变基矢量和逆变基矢量的对偶条件式(1.4.6)知 $\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$，另外根据式(1.2.19)关于三个矢量混合积的定义，我们可以得到计算逆变基矢量的另一种公式，即

$$\boldsymbol{g}^1 = \frac{\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]} \tag{1.9.1a}$$

$$\boldsymbol{g}^2 = \frac{\boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]} \tag{1.9.1b}$$

$$\boldsymbol{g}^3 = \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]} \tag{1.9.1c}$$

事实上，在式(1.9.1a)等号两边同时点积 $\boldsymbol{g}_1$ 就可得证。式(1.9.1b)和式(1.9.1c)也可由混合积的轮换性式(1.2.20)保证。自然，上式中有

$$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$$

下面我们再来计算逆变基矢量的混合积 $[\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3]$。其中的 $\boldsymbol{g}^3$ 用式(1.9.1c)代入，并利用二重叉积公式(1.2.18)，并注意到 $\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta_j^i$，就可得到

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3] &= \boldsymbol{g}^1 \cdot (\boldsymbol{g}^2 \times \boldsymbol{g}^3) = \boldsymbol{g}^1 \cdot \left\{\boldsymbol{g}^2 \times \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]}\right\} \\
&= \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]}\boldsymbol{g}^1 \cdot [\boldsymbol{g}^2 \times \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2] \\
&= \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]}\boldsymbol{g}^1 \cdot [(\boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_2)\boldsymbol{g}_1 - (\boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_1)\boldsymbol{g}_2] \\
&= \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]}\boldsymbol{g}^1 \cdot (\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{0}) \\
&= \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]}
\end{aligned}$$

因此，我们便可得到协变基矢量的混合积和逆变基矢量混合积的关系式

$$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3][\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3] = 1 \tag{1.9.2}$$

下面我们进一步来找基矢量的混合积与度量张量 g_{ij}, g^{ij} 组成的行列式的值之间的关

系。

把度量张量的 9 个协变分量 g_{ij} 排成一个方阵，并计算它的行列式的值，记做 g，即

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{1.9.3}$$

同样地，把度量张量的 9 个逆变分量 g^{ij} 也排成一个方阵，并计算它的行列式的值，由式(1.8.4)，可得

$$\frac{1}{g} = |g^{ij}| = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} \tag{1.9.4}$$

由度量张量的定义式(1.8.2a) 并考虑到式(1.2.21)，式(1.9.3) 也可写成

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3]^2$$

因此，即可得到

$$[\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \sqrt{g} \tag{1.9.5}$$

同样地，也可得到逆变基矢量的混合积

$$[\boldsymbol{g}^1 \quad \boldsymbol{g}^2 \quad \boldsymbol{g}^3] = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.9.6}$$

这样，式(1.9.1) 可改写成

$$\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 \tag{1.9.1a'}$$

$$\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1 \tag{1.9.1b'}$$

$$\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 \tag{1.9.1c'}$$

1.9.2 置换张量(Eddington 张量)

在定义置换张量之前，先介绍一下关于指标偶排列、奇排列的概念。

一个具有 3 个指标的符号 b_{ijk}，指标 i,j,k 的取值范围为 1,2,3 共有 27 种取法。指标 i,j,k 的原始排列顺序为 123，若将其中的任一对指标互换一次可变为 132,213 或 321，称为指标的一次置换；在此基础上再将任一对指标互换一次称为指标的二次置换，可得到 312,123,231；如此可以定义指标的 k 次置换，k 为奇数时称为奇置换，k 为偶数时称为偶置换。由原始顺序轮换得到的 123,231 与 312 三种指标排列称为**偶排列**，因为它们只能由偶置换得到；由原始顺序轮换得到的 321,213 与 132 三种指标排列称为**奇排列**，因为它们只能由奇置换得到。ijk 在其取值范围内除上述 6 种排列外，其余的 21 种取法均有 2 个或 3 个指标相同的情形。

下面我们引进一个新的张量。

对于任意坐标系，引进下述两组量(每组由 27 个数组成)

$$\varepsilon_{ijk} = [\boldsymbol{g}_i \quad \boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{g}_k] = \begin{cases} \sqrt{g}, & \text{当 } ijk \text{ 为偶排列} \\ -\sqrt{g}, & \text{当 } ijk \text{ 为奇排列} \\ 0, & \text{当 } ijk \text{ 中至少两个相等} \end{cases} \tag{1.9.7a}$$

$$\varepsilon^{ijk} = [\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{当 } ijk \text{ 为偶排列} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{当 } ijk \text{ 为奇排列} \\ 0, & \text{当 } ijk \text{ 中至少两个相等} \end{cases} \tag{1.9.7b}$$

现在我们来证明 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 都是三阶张量,并且它们表示的是同一个三阶张量。为此考察坐标变换。

设新坐标系 $x^{i'}$ 下的协变基矢量和逆变基矢量分别为 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$,满足新老坐标系下的转换关系 $\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^{i'} = \beta_i^{i'}\boldsymbol{g}^i$。按定义,在新坐标系 $x^{i'}$ 下有

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i'j'k'} &= [\boldsymbol{g}_{i'} \quad \boldsymbol{g}_{j'} \quad \boldsymbol{g}_{k'}] = [\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i \quad \beta_{j'}^{j}\boldsymbol{g}_j \quad \beta_{k'}^{k}\boldsymbol{g}_k] \\ &= \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\beta_{k'}^{k}[\boldsymbol{g}_i \quad \boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{g}_k] \\ &= \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\beta_{k'}^{k}\varepsilon_{ijk}\end{aligned}$$

由此证明了 ε_{ijk} 满足三重协变性,所以它是一个三阶张量。同理可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i'j'k'} &= [\boldsymbol{g}^{i'} \quad \boldsymbol{g}^{j'} \quad \boldsymbol{g}^{k'}] = [\beta_i^{i'}\boldsymbol{g}^i \quad \beta_j^{j'}\boldsymbol{g}^j \quad \beta_k^{k'}\boldsymbol{g}^k] \\ &= \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}[\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] \\ &= \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\varepsilon^{ijk}\end{aligned}$$

从而证明了 ε^{ijk} 满足三重逆变性,所以它也是一个三阶张量。

还需证明 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 表示的是同一个三阶张量。由于

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= [\boldsymbol{g}_i \quad \boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{g}_k] = \boldsymbol{g}_i \cdot (\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k) \\ &= g_{ip}\boldsymbol{g}^p \cdot [(g_{jq}\boldsymbol{g}^q) \times (g_{kr}\boldsymbol{g}^r)] \\ &= g_{ip}g_{jq}g_{kr}\boldsymbol{g}^p \cdot (\boldsymbol{g}^q \times \boldsymbol{g}^r) \\ &= g_{ip}g_{jq}g_{kr}[\boldsymbol{g}^p \quad \boldsymbol{g}^q \quad \boldsymbol{g}^r] \\ &= g_{ip}g_{jq}g_{kr}\varepsilon^{pqr}\end{aligned}$$

这就是说,ε_{ijk} 可由 ε^{pqr} 通过度量张量降标而得,从而证明了 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 是同一个三阶张量。通常把这个三阶张量称为**置换张量(Eddington 张量)**,记做 $\boldsymbol{\varepsilon}$。ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 分别是置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的协变分量和逆变分量。当然 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 也有其他六种混变分量,但一般缺乏实用价值,故在这里不一一列出了。

这样,置换张量(Eddington 张量)$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的并基展开式可写成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k = \varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k \tag{1.9.8}$$

1.9.3 由置换张量表示的矢量的叉积和混合积

设在同一坐标系下某点的三个矢量分别为

$$\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{g}_i = u_i\boldsymbol{g}^i$$
$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{g}_i = v_i\boldsymbol{g}^i$$
$$\boldsymbol{w} = w^i\boldsymbol{g}_i = w_i\boldsymbol{g}^i$$

现在计算矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积,设

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} = a^k\boldsymbol{g}_k = a_k\boldsymbol{g}^k$$

则有

$$
\begin{aligned}
a_k &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}_k = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}_k = [(u^i \boldsymbol{g}_i) \times (v^j \boldsymbol{g}_j)] \cdot \boldsymbol{g}_k \\
&= u^i v^j (\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_j) \cdot \boldsymbol{g}_k \\
&= u^i v^j [\boldsymbol{g}_i \quad \boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{g}_k] \\
&= \varepsilon_{ijk} u^i v^j
\end{aligned} \tag{1.9.9a}
$$

同样

$$
\begin{aligned}
a^k &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{g}^k = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{g}^k = [(u_i \boldsymbol{g}^i) \times (v_j \boldsymbol{g}^j)] \cdot \boldsymbol{g}^k \\
&= u_i v_j (\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^j) \cdot \boldsymbol{g}^k \\
&= u_i v_j [\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] \\
&= \varepsilon^{ijk} u_i v_j
\end{aligned} \tag{1.9.9b}
$$

或者写成并基展开式

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j \boldsymbol{g}^k = \varepsilon^{ijk} u_i v_j \boldsymbol{g}_k \tag{1.9.9c}
$$

特别对于基矢量，分别有

$$
\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k \tag{1.9.10a}
$$

$$
\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^j = \varepsilon^{ijk} \boldsymbol{g}_k \tag{1.9.10b}
$$

再看三个矢量的混合积

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \\
&= u^i \boldsymbol{g}_i \cdot [(v^j \boldsymbol{g}_j) \times (w^k \boldsymbol{g}_k)] \\
&= u^i v^j w^k \boldsymbol{g}_i \cdot (\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k) \\
&= u^i v^j w^k [\boldsymbol{g}_i \quad \boldsymbol{g}_j \quad \boldsymbol{g}_k] \\
&= \varepsilon_{ijk} u^i v^j w^k
\end{aligned} \tag{1.9.11a}
$$

或者写成

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = u_i \boldsymbol{g}^i \cdot [(v_j \boldsymbol{g}^j) \times (w_k \boldsymbol{g}^k)] \\
&= \varepsilon^{ijk} u_i v_j w_k
\end{aligned} \tag{1.9.11b}
$$

现在改写式(1.9.11)，注意到 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 各 27 个分量中只有 6 个不为零的分量，即 3 个偶排列的和 3 个奇排列的，所以将求和约定展开后都只包含 6 项，于是式(1.9.11a) 可记为

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] &= \varepsilon_{123} u^1 v^2 w^3 + \varepsilon_{231} u^2 v^3 w^1 + \varepsilon_{312} u^3 v^1 w^2 \\
&\quad + \varepsilon_{132} u^1 v^3 w^2 + \varepsilon_{213} u^2 v^1 w^3 + \varepsilon_{321} u^3 v^2 w^1 \\
&= \sqrt{g}(u^1 v^2 w^3 + u^2 v^3 w^1 + u^3 v^1 w^2 \\
&\quad - u^1 v^3 w^2 - u^2 v^1 w^3 - u^3 v^2 w^1)
\end{aligned}
$$

而上式括号内的六项正好是一个行列式的展开式，故有

$$
[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \sqrt{g} \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix} \tag{1.9.12a}
$$

同样地，也可将式(1.9.11b) 化成

$$
[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.9.12b}
$$

再来看两组矢量混合积的积。如另有一组矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的混合积，将其用矢量的协变分

量表示，即用式(1.9.12b)表示

$$[\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{c}] = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

把混合积式(1.9.12a)与上式相乘

$$[\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w}][\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u^i a_i & u^i b_i & u^i c_i \\ v^i a_i & v^i b_i & v^i c_i \\ w^i a_i & w^i b_i & w^i c_i \end{vmatrix} \quad (i = 1,2,3)$$

由矢量点积的公式(1.3.11)，就可把上式写成

$$[\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v}\quad \boldsymbol{w}][\boldsymbol{a}\quad \boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{1.9.13}$$

根据式(1.9.13)，现在我们考虑置换张量协变分量 ϵ_{ijk} 和逆变分量 ϵ^{ijk} 的乘积，从中可以得到重要的公式

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{rst} = [\boldsymbol{g}^i\quad \boldsymbol{g}^j\quad \boldsymbol{g}^k][\boldsymbol{g}_r\quad \boldsymbol{g}_s\quad \boldsymbol{g}_t] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_r & \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_t \\ \boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_r & \boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_t \\ \boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_r & \boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_s & \boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix}$$

我们定义

$$\begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix} = \epsilon^{ijk}\epsilon_{rst} \xlongequal{\triangle} \delta_{rst}^{ijk} \tag{1.9.14}$$

δ_{rst}^{ijk} 称为广义 **Kronecker** δ。它实际上是一个六阶张量，这里就不加以证明了。至于它的取值，很明显，当 ijk 和 rst 都是偶排列或都是奇排列时，其值为 1；当 ijk 和 rst 中有一个偶排列，而另一个是奇排列时，其值为 -1；当 ijk 和 rst 中任意一个至少有两个指标相同时，其值为 0。所以可以写成

$$\delta_{rst}^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 和 } rst \text{ 都是偶排列或都是奇排列} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 和 } rst \text{ 中有一个为偶排列，另一个为奇排列} \\ 0, & \text{当 } ijk \text{ 和 } rst \text{ 中至少有一个两个指标相同} \end{cases} \tag{1.9.15}$$

如果使广义 Kronecker δ 上下指标中有一个相同时，一般令第一个指标相同，从而这个指标就成了哑指标。由式(1.9.14)有

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta^{ijk}_{ist} = \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^j_i & \delta^j_s & \delta^j_t \\ \delta^k_i & \delta^k_s & \delta^k_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \delta^i_s & \delta^i_t \\ 0 & \delta^j_s & \delta^j_t \\ 0 & \delta^k_s & \delta^k_t \end{vmatrix} = \delta^j_s\delta^k_t - \delta^j_t\delta^k_s \xlongequal{\triangle} \delta^{jk}_{st} \tag{1.9.16}$$

实际上 δ^{jk}_{st} 是一个四阶张量,这里就不加以证明了。

更进一步,使广义 Kronecker δ 上下指标中有两个相同时,一般令第 1、2 个指标相同。此时由式(1.9.16) 可知

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijt} = \delta^{jk}_{jt} = \delta^j_j\delta^k_t - \delta^j_t\delta^k_j = 3\delta^k_t - \delta^k_t = 2\delta^k_t \tag{1.9.17}$$

实际上,它成了一个二阶张量了。

再进一步,如果广义 Kronecker δ 上下指标都相同,则由式(1.9.17) 知

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta^k_k = 6 = 3! \tag{1.9.18}$$

此时就成了一个标量。

例 1.4 已知一斜角直线坐标系的协变基矢量是

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是直角笛卡尔坐标系的单位基矢量。试求:度量张量 g_{ij} 和 g^{ij},并验证

$$[g_{ij}][g^{ij}] = \boldsymbol{I}$$

解 先求 g_{ij},根据式(1.8.2a) 有

$$g_{11} = \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_1 = 2$$
$$g_{22} = \boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_2 = 2$$
$$g_{33} = \boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_3 = 2$$
$$g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2 = 1$$
$$g_{23} = g_{32} = \boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_3 = 1$$
$$g_{31} = g_{13} = \boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_1 = 1$$

所以

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

又根据式(1.9.3),度量张量 9 个协变分量 g_{ij} 组成的方阵,其对应的行列式的值为

$$g = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

所以

$$\sqrt{g} = 2$$

再求 g^{ij},根据式(1.9.1a′)、式(1.9.1b′)、式(1.9.1c′) 得

$$\boldsymbol{g}^1 = \frac{\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3}{\sqrt{g}} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{2}$$

$$\boldsymbol{g}^2 = \frac{\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1}{\sqrt{g}} = \frac{-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{2}$$

$$\boldsymbol{g}^3 = \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{\sqrt{g}} = \frac{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{2}$$

由式(1.8.2b) 可得

$$g^{11} = \boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}^1 = \frac{3}{4}$$

$$g^{22} = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}^2 = \frac{3}{4}$$

$$g^{33} = \boldsymbol{g}^3 \cdot \boldsymbol{g}^3 = \frac{3}{4}$$

$$g^{12} = g^{21} = \boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}^2 = -\frac{1}{4}$$

$$g^{23} = g^{32} = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}^3 = -\frac{1}{4}$$

$$g^{31} = g^{13} = \boldsymbol{g}^3 \cdot \boldsymbol{g}^1 = -\frac{1}{4}$$

所以

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

很明显

$$[g_{ij}][g^{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

例 1.5 一斜角直线坐标系的协变基矢量如例 1.4。若一个二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量对应矩阵为

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

试求二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的其他分量 $A^{ij}, A^{i}_{\cdot j}, A_{i}^{\cdot j}$。

解 由例 1.4 可知其度量张量的对应矩阵为

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

利用度量张量的升降标关系式(1.8.12)有

$$A^{i}_{\cdot j} = g^{ik}A_{kj}$$
$$A_{i}^{\cdot j} = g^{jk}A_{ik}$$
$$A^{ij} = g^{im}g^{jn}A_{mn}$$

用矩阵来表示有

$$[A^{i}_{\cdot j}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{i}^{\cdot j}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{21}{16} & -\frac{23}{16} & \frac{9}{16} \\ -\frac{19}{16} & \frac{17}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{17}{16} & -\frac{15}{16} \end{bmatrix}$$

1.10 张量的代数运算

在实际应用中,张量同矢量和标量一样,需要进行代数运算,下面我们就张量的代数运算逐一进行定义。

1.10.1 张量的相等

若两个张量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}$ 在同一坐标系中的逆变(或协变,或某一混变)分量一一相等,即

$$T^{ij\cdots} = S^{ij\cdots} \quad (i,j,\cdots = 1,2,3) \tag{1.10.1}$$

则此两个张量的其他一切分量均一一相等

$$T_{ij\cdots} = S_{ij\cdots}$$
$$T^{i}_{\cdot j} = S^{i}_{\cdot j} \quad (i,j,\cdots = 1,2,3) \tag{1.10.2}$$

且在任意坐标系中的一切分量均一一相等

$$T^{k'l'\cdots} = S^{k'l'\cdots} \quad (k',l',\cdots = 1',2',3') \tag{1.10.3}$$

则称张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 相等，记做

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} \tag{1.10.4}$$

1.10.2　张量的加法

若 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}$ 为同阶张量，将它们在同一坐标系下的逆变（或协变，或某一种混变）分量一一相加，则得到一组数，它们是新张量 $\boldsymbol{U}$ 的逆变（或协变，或某一种混变）分量

$$T^{ij\cdots} + S^{ij\cdots} = U^{ij\cdots} \quad (i,j,\cdots = 1,2,3) \tag{1.10.5}$$

且对于任意坐标系中任意其他分量，此和式均成立，则称张量 $\boldsymbol{U}$ 为张量 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{S}$ 之和。记做

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{U} \tag{1.10.6}$$

显然，两个同阶张量的和仍是同阶张量。

1.10.3　标量与张量相乘

若将张量 $\boldsymbol{T}$ 在某一坐标系中的逆变（或协变，或某一种混变）分量乘以标量 k，则得到一组数，它们是新张量 $\boldsymbol{U}$ 的逆变（或协变，或某一种混变）分量，即

$$kT^{ij\cdots} = U^{ij\cdots} \quad (i,j,\cdots = 1,2,3) \tag{1.10.7}$$

且对于任意坐标系中任意其他分量，此等式均成立，则称张量 $\boldsymbol{U}$ 等于 k 乘以张量 $\boldsymbol{T}$。记做

$$k\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U} \tag{1.10.8}$$

若把式(1.10.6)中的张量 $\boldsymbol{S}$ 乘以 $k = -1$，则为两张量相减，即

$$\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} + (-1)\boldsymbol{S} \tag{1.10.9}$$

1.10.4　张量与张量并乘

两个张量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}$ 的并乘得到一个新张量 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{U}$ 的阶数等于 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的阶数之和，新张量 $\boldsymbol{U}$ 的分量指标的前后顺序和上下位置都应与 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的指标顺序和上下位置相一致。这种运算称为张量与张量的**并乘**，记做

$$\boldsymbol{TS} = \boldsymbol{U} \tag{1.10.10a}$$

如写成并基展开式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{TS} &= (T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l)(S^{p\cdots q}{}_{r\cdots s}\boldsymbol{g}_p\cdots\boldsymbol{g}_q\boldsymbol{g}^r\cdots\boldsymbol{g}^s)\\ &= T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}S^{p\cdots q}{}_{r\cdots s}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_p\cdots\boldsymbol{g}_q\boldsymbol{g}^r\cdots\boldsymbol{g}^s\end{aligned} \tag{1.10.10b}$$

应当注意，张量的并乘与次序有关，故

$$\boldsymbol{TS} \neq \boldsymbol{ST} \tag{1.10.11}$$

特别要指出，如果并乘的张量中有一个张量是零阶张量（即标量），那就是前面 1.10.3 的情形。如果两个一阶张量（即矢量）并乘，那就是我们在前面讨论过的并矢，也就是二阶张量了。二重矢就是若干个并矢各自乘上一标量后再相加。三重矢即为并矢和矢量的并乘。

还应指出，广义 Kronecker δ 实际上就是两个置换张量（Eddington 张量）的并乘，其中一个取协变分量形式，另一个取逆变分量形式，它是一个六阶张量。

1.10.5　张量的缩并

在张量的并基展开式中将并基中两个基矢量（一般总是取一个协变基矢量，而另一个为逆变基矢量）进行点积，这一运算称为张量的**缩并**。经缩并运算后的结果是一个比原张量低

两阶的张量。

例如，将四阶张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$ 中的第 2、第 4 个基矢量进行点积，得到一新的张量可记为 $\boldsymbol{S}$，即

$$\boldsymbol{S} = \overset{\ulcorner\bullet\urcorner}{\boldsymbol{T}} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\delta^l_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k = T^{ij}_{\cdot\cdot kj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k = S^{i}_{\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k \tag{1.10.12a}$$

因此

$$S^{i}_{\cdot k} = T^{ij}_{\cdot\cdot kj} \tag{1.10.12b}$$

式(1.10.12b) 说明，从指标的角度来看，缩并就是把张量的一个上标和一个下标写成哑指标，再按求和约定进行运算。上一节中将六阶张量 $\epsilon^{ijk}\epsilon_{rst}$ 中的第 1 个和第 4 个指标进行缩并，即写成哑指标就得到了一个四阶张量 δ^{jk}_{st}。

张量每缩并一次就消去两个基矢量，因而降低了两阶。

1.10.6 张量的点积、双点积

1. 点积

两个张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 先并乘后缩并的运算称为张量的**点积**(或称**内积**)。一般是把前一个张量并基中的最后一个基矢量与后一个张量并基中的第一个基矢量进行缩并。而且往往是一个协变基矢量与另一个逆变基矢量进行缩并。以四阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与三阶张量 $\boldsymbol{S}$ 的点积为例，设

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$\boldsymbol{S} = S^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t$$

则 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的点积可记做 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$，即有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} &= (T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l)\cdot(S^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)\\ &= T^{ij}_{\cdot\cdot kl}S^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\overset{\ulcorner\bullet\urcorner}{\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_r}\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t\\ &= T^{ij}_{\cdot\cdot kl}S^{rs}_{\cdot\cdot t}\delta^l_r\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t\\ &= T^{ij}_{\cdot\cdot kl}S^{ls}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t\end{aligned} \tag{1.10.13}$$

因为上例中 l 成了哑标，所以它是一个五阶张量。也就是说，如果将一个 m 阶张量和一个 n 阶张量点积得到的新张量的阶数为 $m+n-2$。

很明显，当两个张量都是矢量时，则以上的运算就是矢量的点积，它们是可以交换的，因为其结果是一标量。但如果其中有一个是高于一阶的张量，则点积是不可交换的。因此，在一般情况下，有

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T} \tag{1.10.14}$$

2. 双点积

若在两个张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 并乘之后再进行两次缩并，则称为**双点积**。一般是把前一个张量并基中的最后两个基矢量与后一个张量并基中的前面两个基矢量分别进行缩并。而且往往也是一个协变基矢量与另一个逆变基矢量进行缩并。

双点积与并矢的双点积公式(1.6.8) 和式(1.6.9) 相类似，也有并联式和串联式两种。我们仍以四阶张量 $\boldsymbol{T}$ 和三阶张量 $\boldsymbol{S}$ 为例加以说明。

并联式

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S} = (T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l):(S^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)$$

$$
\begin{aligned}
&= T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs}_{\cdot\cdot t} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l \boldsymbol{g}_r \boldsymbol{g}_s \boldsymbol{g}^t \\
&= T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs}_{\cdot\cdot t} \delta^k_r \delta^l_s \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^t \\
&= T^{ij}_{\cdot\cdot ks} S^{ks}_{\cdot\cdot t} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^t
\end{aligned} \tag{1.10.15}
$$

此时,因为 k,s 成了哑标,所以自由标为 3 个,是一个三阶张量。

串联式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{S} &= (T^{ij}_{\cdot\cdot kl} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l) \cdot\cdot (S^{rs}_{\cdot\cdot t} \boldsymbol{g}_r \boldsymbol{g}_s \boldsymbol{g}^t) \\
&= T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs}_{\cdot\cdot t} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l \boldsymbol{g}_r \boldsymbol{g}_s \boldsymbol{g}^t \\
&= T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs}_{\cdot\cdot t} \delta^k_s \delta^l_r \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^t \\
&= T^{ij}_{\cdot\cdot sl} S^{ls}_{\cdot\cdot t} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^t
\end{aligned} \tag{1.10.16}
$$

此式中,s,l 为哑标,也是一个三阶张量。两种形式中一般实用的还是并联式。显然,在一般情况下

$$
\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{S} \tag{1.10.17}
$$

如果一个 m 阶张量与一个 n 阶张量双点积,则得到的新张量的阶数为 $m+n-4$。

在张量的代数运算中,有时还会碰到三点积的情形(如例 1.7),其运算法则是相同的。

例 1.6 证明两个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的叉积可以表示为

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \tag{1.10.18a}
$$

证 由式(1.9.9c)知

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \varepsilon_{ijk} u^i v^j \boldsymbol{g}^k
$$

而

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\varepsilon} &= u^l \boldsymbol{g}_l v^m \boldsymbol{g}_m : \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k \\
&= u^l v^m \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m : \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k \\
&= u^l v^m \varepsilon_{ijk} \delta^i_l \delta^j_m \boldsymbol{g}^k \\
&= u^i v^j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k
\end{aligned}
$$

同样

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} &= \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k : u^l v^m \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \\
&= u^l v^m \varepsilon_{ijk} \delta^j_l \delta^k_m \boldsymbol{g}^i \\
&= u^j v^k \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^i \\
&= u^j v^k \varepsilon_{jki} \boldsymbol{g}^i \\
&= u^i v^j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k
\end{aligned}
$$

故证得

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}
$$

而且

$$
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{v}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.10.18b}
$$

利用

$$
\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}
$$

便可证明上式。

例 1.7 证明三个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的混合积可以表示为

$$[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} \vdots \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \vdots \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} \tag{1.10.19}$$

证　由式(1.9.11a)知

$$[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \epsilon_{ijk}u^i v^j w^k$$

而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} \vdots \boldsymbol{\varepsilon} &= u^l \boldsymbol{g}_l v^m \boldsymbol{g}_m w^n \boldsymbol{g}_n \vdots \epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k \\
&= u^l v^m w^n \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n \vdots \epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k \\
&= \epsilon_{ijk}u^l v^m w^n \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k \\
&= \epsilon_{ijk}u^i v^j w^k
\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} \vdots \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} &= \epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k \vdots u^l v^m w^n \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n \\
&= \epsilon_{ijk}u^l v^m w^n \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k \\
&= \epsilon_{ijk}u^i v^j w^k
\end{aligned}$$

故得证。

例 1.8　证明三个矢量的二重叉积公式(1.2.18)

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$$

证　由式(1.10.18a)

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{\varepsilon} : [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} : \boldsymbol{\varepsilon})] = [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{v}\boldsymbol{w})] : \boldsymbol{\varepsilon}$$

写并基展开式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= \epsilon^{lmn}\boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n : [u_i \boldsymbol{g}^i (v^j \boldsymbol{g}_j w^k \boldsymbol{g}_k : \epsilon_{rst}\boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}^t)] \\
&= \epsilon^{lmn}\boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n : [u_i \boldsymbol{g}^i (v^j w^k \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k : \epsilon_{rst}\boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}^t)] \\
&= \epsilon^{lmn}\boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n : (u_i \boldsymbol{g}^i v^j w^k \epsilon_{rst}\delta_j^r \delta_k^s \boldsymbol{g}^t) \\
&= \epsilon^{lmn}\boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n : u_i v^j w^k \epsilon_{jkt}\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^t \\
&= u_i v^j w^k \epsilon^{lmn}\epsilon_{jkt}\delta_m^i \delta_n^t \boldsymbol{g}_l \\
&= u_i v^j w^k \epsilon^{lit}\epsilon_{jkt}\boldsymbol{g}_l \\
&= u_i v^j w^k \epsilon^{tli}\epsilon_{tjk}\boldsymbol{g}_l \\
&= u_i v^j w^k (\delta_{jk}^{li})\boldsymbol{g}_l \\
&= u_i v^j w^k (\delta_j^l \delta_k^i - \delta_k^l \delta_j^i)\boldsymbol{g}_l \\
&= (u_i v^j w^k \delta_j^l \delta_k^i - u_i v^j w^k \delta_k^l \delta_j^i)\boldsymbol{g}_l \\
&= (u_i v^l w^i)\boldsymbol{g}_l - (u_i v^i w^l)\boldsymbol{g}_l \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}
\end{aligned}$$

1.10.7　张量的叉积、双叉积和点叉混积

把张量点积的“·”换成“×”，即得叉积；把张量双点积的“:”换成“$\overset{\times}{\times}$”，即得双叉积；把“$\overset{\cdot}{\times}$”、“$\overset{\times}{\cdot}$”称为点叉混积。对于以上各种运算，基矢量的排列顺序不变。下面举例说明之。设两个二阶张量

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j$$

$$\boldsymbol{S} = S_{kl}\boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l = S^k_{\cdot l}\boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^l = S_k^{\cdot l}\boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}_l$$

则有

叉积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S} &= (T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j) \times (S_{kl}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l) \\ &= T_{ij}S_{kl}\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{g}^j \times \boldsymbol{g}^k)\boldsymbol{g}^l \\ &= T_{ij}S_{kl}\varepsilon^{jkm}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^l \end{aligned} \tag{1.10.20}$$

双叉积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \overset{\times}{\times} &= (T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j) \overset{\times}{\times} (S_{kl}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l) \\ &= T_{ij}S_{kl}(\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^k)(\boldsymbol{g}^j \times \boldsymbol{g}^l) \\ &= T_{ij}S_{kl}\varepsilon^{ikm}\boldsymbol{g}_m\varepsilon^{jln}\boldsymbol{g}_n \\ &= T_{ij}S_{kl}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{jln}\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_n \end{aligned} \tag{1.10.21}$$

点叉混积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \overset{\cdot}{\times} &= (T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j) \overset{\cdot}{\times} (S^{k}_{\cdot l}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^l) \\ &= T_{ij}S^{k}_{\cdot l}(\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_k)(\boldsymbol{g}^j \times \boldsymbol{g}^l) \\ &= T_{ij}S^{k}_{\cdot l}\delta^i_k\varepsilon^{jlm}\boldsymbol{g}_m \\ &= T_{ij}S^{i}_{\cdot l}\varepsilon^{jlm}\boldsymbol{g}_m \end{aligned} \tag{1.10.22}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \overset{\times}{\cdot} \boldsymbol{S} &= (T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j) \overset{\times}{\cdot} (S_{k}^{\cdot l}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l) \\ &= T_{ij}S_{k}^{\cdot l}(\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^k)(\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}_l) \\ &= T_{ij}S_{k}^{\cdot l}\varepsilon^{ikm}\boldsymbol{g}_m\delta^j_l \\ &= T_{ij}S_{k}^{\cdot j}\varepsilon^{ikm}\boldsymbol{g}_m \end{aligned} \tag{1.10.23}$$

由于两个基矢量叉积的结果是矢量,所以两个张量叉积后,其所得新张量的阶数等于两张量阶数之和减去 1;两个张量双叉积后,其所得新张量的阶数等于两张量阶数之和减去 2;两个张量的点叉混积,其所得新张量的阶数等于两张量阶数之和减去 3。这从上面的例子可以看得很清楚。

从上面的运算中,我们还看到,在进行点积运算时,总是用一个协变基矢量与一个逆变基矢量进行点积,而在进行叉积运算时,总是用协变基矢量(或逆变基矢量)与协变基矢量(或逆变基矢量)进行叉积,这主要是为了运算方便起见。如果条件得不到满足时,我们可以利用度量张量的升降标使基矢量符合上面运算的要求,从而达到目的。

1.10.8 转置张量

如果保持基矢量的排列顺序不变,而调换张量分量的指标顺序,但保持每个指标的水平位置不变,则一般说来将得到一个同阶的新张量,则称此张量为原张量(关于调换顺序的那对指标)的转置张量。

例如,对于四阶张量

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

对第 1,2 指标的转置张量是

$$\boldsymbol{S} = S^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = T^{ji}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.10.24a}$$

用分量形式表示为

$$S^{ij}_{\cdot\cdot kl} = T^{ji}_{\cdot\cdot kl} \tag{1.10.24b}$$

对第 1,3 指标的转置张量是

$$\boldsymbol{R} = R^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = T_{k\cdot\cdot l}^{\cdot ji}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.10.25a}$$

用分量形式表示为

$$R^{ij}_{\cdot\cdot kl} = T^{\cdot jl}_{k\cdot\cdot i} \tag{1.10.25b}$$

上述 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 都是原张量 $\boldsymbol{T}$ 的转置张量，一般说来

$$\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{R}$$

特别地，对于二阶张量，它只有一个转置张量，常常把这个转置张量称为原张量的**共轭**。在不变性记法的右下角加"c"表示其共轭张量。例如 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，则 $\boldsymbol{T}$ 的共轭张量为

$$\boldsymbol{T}_c = T_{ji}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{1.10.26}$$

1.10.9 张量的对称化和反对称化

若调换张量某两个分量指标的顺序，所得的转置张量与原张量相等，则称该张量关于这两个指标是**对称的**。例如，设四阶张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$ 满足

$$T^{ij}_{\cdot\cdot kl} = T^{ji}_{\cdot\cdot kl} \tag{1.10.27}$$

则张量 $\boldsymbol{T}$ 对其 1,2 指标来说是对称的。

若调换张量某两个分量指标的顺序所得的转置张量与原张量相差"－"符号，则称该张量关于这两个指标是**反对称的**。仍以上述的四阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为例，若

$$T^{ij}_{\cdot\cdot kl} = -T^{\cdot ji}_{k\cdot\cdot l} \tag{1.10.28}$$

则张量 $\boldsymbol{T}$ 关于指标 1,3 是反对称的。

若一个张量对任意两个指标都是对称的，则称此张量为**对称张量**；若一个张量对任意两个指标都是反对称的，则称此张量为**反对称张量**。

根据以上的定义，不难看出度量张量 $\boldsymbol{G}$ 是对称张量，而置换张量(Eddington 张量)$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是反对称张量。

也容易理解，对称张量和反对称张量的这一性质与坐标系的选取无关。这就是说，若在某一坐标系下已经证实一个张量是对称张量(或反对称张量)，则在其他任何坐标系下也必然有这一性质。

下面我们来定义张量的对称化运算和反对称化运算。

如果对张量并基展开式中的基矢量保持原排列顺序，而对其分量作如下运算：把张量分量的全部 n 个指标在保持各指标水平不变的情形下进行 $n!$ 种不同的排列，从而对求所得的 $n!$ 个张量的分量(包括原有的分量)取算术平均值，其结果必是对称张量的分量，这种运算叫做张量的**对称化**。

若对所得的 $n!$ 个张量的分量中将指标经过偶数次置换所得的分量取正号，而将指标经过奇数次置换所得的分量取负号，然后再取算术平均值，其结果必是反对称张量的分量。这种运算叫做张量的**反对称化**。

一般用指标记法表示上述两种运算。把对称化运算所得的结果张量的指标放在圆括号中表出；把反对称化运算所得的结果张量的指标放在方括号中表出。

例如，对二阶张量 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$，作对称化运算和反对称化运算后所得的结果张量的分量分别表示为

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}) \tag{1.10.29}$$

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2!}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{1.10.30}$$

由此可以得到

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]} \tag{1.10.31a}$$

或者写成不变性记法，并利用式(1.10.26)可得

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_c) \tag{1.10.31b}$$

由式(1.10.31a)可知，任意一个二阶张量可按此式分解为一个对称张量和一个反对称张量之和，而且这种分解法是惟一的。

又如，对于三阶张量 $\boldsymbol{S} = S_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$，作对称化运算后结果张量的分量是

$$S_{(ijk)} = \frac{1}{3!}(S_{ijk} + S_{jki} + S_{kij} + S_{ikj} + S_{jik} + S_{kji}) \tag{1.10.32}$$

对张量 $\boldsymbol{S}$ 作反对称化运算后结果张量的分量是

$$S_{[ijk]} = \frac{1}{3!}(S_{ijk} + S_{jki} + S_{kij} - S_{ikj} - S_{jik} - S_{kji}) \tag{1.10.32}$$

对称化运算和反对称化运算表明，对于任意一个给定的张量，我们都能根据对称化运算造出一个对称张量；根据反对称运算造出一个反对称张量。特别地，对一阶张量来说，此时，只有一组排列方法，所以对称化和反对称化后的结果仍然是其本身。

1.10.10 张量的商法则

设对于任意坐标系都有一组数的集合 $T(i,j,k,l,m)$（其中 $i,j,k,l,m = 1,2,3$），如果满足：它与任意一个二阶张量 S^{lm} 的二次缩并后均成为一个三阶张量 U^{ijk}，即在任意坐标系下均成立等式

$$T(i,j,k,l,m)S^{lm} = U^{ijk} \tag{1.10.34}$$

式中，l,m 为哑指标，即左端对 $l,m = 1,2,3$ 求和，则这组数的集合 $T(i,j,k,l,m)$ 必定是一个五阶张量，即

$$T(i,j,k,l,m) = T^{ijk}_{\cdots lm} \tag{1.10.35}$$

以上的表述就是张量的商法则。

事实上，需证明 $T(i,j,k,l,m)$ 是一个张量，只需证明其满足张量的变换规则即可。根据所给条件，在新坐标系 $x^{i'}$ 下，式(1.10.34)仍然成立，即

$$T(i',j',k',l',m')S^{l'm'} = U^{i'j'k'} \tag{1.10.36a}$$

式中，l',m' 为哑指标，即左端对 $l',m' = 1,2,3$ 求和，由于 S^{lm} 和 U^{ijk} 均为张量，故它们满足张量变换规则，所以

$$\begin{aligned} U^{i'j'k'} &= \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}U^{ijk} = \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}T(i,j,k,l,m)S^{lm} \\ &= \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_{l'}^{l}\beta_{m'}^{m}T(i,j,k,l,m)S^{l'm'} \end{aligned} \tag{1.10.36b}$$

联立式(1.10.36a)和式(1.10.36b)，就可得

$$[T(i',j',k',l',m') - \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_{l'}^{l}\beta_{m'}^{m}T(i,j,k,l,m)]S^{l'm'} = 0 \tag{1.10.37}$$

上式中自由指标为 i',j',k'，故式(1.10.37)表示 $3^3 = 27$ 个式子，l',m' 为哑指标，每个式子中有 $3^2 = 9$ 项求和。由于 $S^{l'm'}$ 是任意二阶张量，所以欲使式(1.10.37)成立，则其每式的9个系数均为零。由此可以推出

$$T(i',j',k',l',m') = \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_{l'}^{l}\beta_{m'}^{m}T(i,j,k,l,m) \tag{1.10.38}$$

从而证明 $T(i,j,k,l,m)$ 这组数的集合满足张量的坐标变换规律，并且前面3个指标是逆变

的，后面 2 个指标是协变的，故可记做一个五阶张量的形式，即

$$T(i,j,k,l,m) = T^{ijk}_{\cdots lm}$$

以上所述是一种特殊情形下的商法则，对于一般情况下的商法则完全可以仿照上述情形描述为：设对于任意坐标系都有一组数的集合 $T(i,j,\cdots,k)$，其中包含有 p 个指标，每个指标取值范围为 1,2,3，如果其中 $q(q < p)$ 个指标与任意一个 q 阶张量作 q 次缩并后成为一个 $p-q$ 阶张量，则这组数的集合 $T(i,j,\cdots,k)$ 必为 p 阶张量。

通常，用坐标变换的法则来判别张量是比较繁的，而商法则提供了一个张量判别的实用方法，这在下面的例子中可以清楚地看到。

例 1.9　应力张量　在笛卡尔坐标系中，已经利用微元体的平衡条件证明过弹性力学中的 Cauchy 公式。即已知变形体中一点的应力状态为（图 1－8）

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

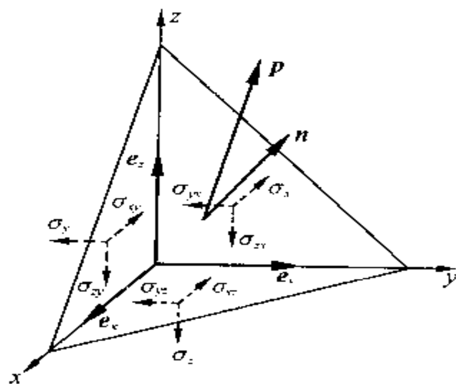


图 1－8　一点的应力状态

则在物体中该点处任一法向单位矢量 $\boldsymbol{n} = n^i\boldsymbol{e}_i$ 的斜截面上作用的单位面积内力矢量 $\boldsymbol{p} = p^j\boldsymbol{e}_j$ 与该点的应力张量之间存在以下关系

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ p_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ p_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{aligned} \tag{a}$$

证明　今利用 Cauchy 公式与商法则证明应力是二阶张量。式(a) 可以用指标符号写作

$$p^i = \sigma(i,j)n^j \tag{b}$$

已知 n^j 为任意矢量的分量，p^i 为矢量分量，根据商法则，应力 $\sigma(i,j)$ 必定是二阶张量，式(b) 记做

$$p^i = \sigma^i_{\cdot j}n^j \tag{c}$$

或

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \tag{d}$$

例 1.10　压电模量张量　压电材料是一种晶体材料，它在电场作用下能发生变形，或者在机械载荷作用下产生电荷。已知在晶体上作用有任意应力张量 σ_{kl}，则可以测量到单位体积的电矩 P^i。发现对于晶体，σ_{kl} 与 P^i 之间满足

$$P^i = d(i,k,l)\sigma_{kl}$$

利用商规则可以证明 $d(i,k,l)$ 是一个三阶张量，称为**压电模量**，它是压电材料本身的属性。上式可写作

$$P^i = d^{ikl}\sigma_{kl} \tag{a}$$

或

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{d} : \boldsymbol{\sigma} \tag{b}$$

例 1.11　惯性矩张量　物体 B 对坐标原点的**动量矩** $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L} = \int_B \rho\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}V \tag{a}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是物体内某质点的矢径和速度矢量，ρ 是该点处的介质密度，$\mathrm{d}V$ 是微元体积，积分域为整个物体 B。由于两个矢量的矢积为矢量，上式表明动量矩 $\boldsymbol{L}$ 是一个矢量。把物体视为固定于坐标原点 o 处的刚体，如图 1－9 所示，而质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和刚体的瞬时角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 之间存在例 1.2 得到的关系

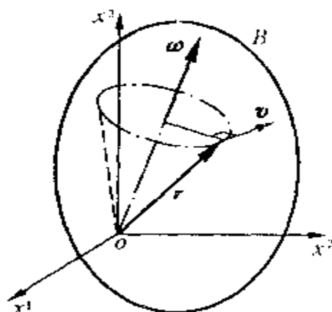


图 1－9　物体的动量矩

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{b}$$

代入式(a)，并利用三矢量的二重叉积公式(1.2.18)，得

$$\boldsymbol{L} = \int_B \rho\, \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \mathrm{d}V = \int_B \rho [(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}] \mathrm{d}V \tag{c}$$

采用直线坐标系 $ox^1x^2x^3$，则式(c) 在坐标轴 x^i 方向上的分量为

$$L^i = \int_B \rho [\omega^i r^m r_m - r^i r_k \omega^k] \mathrm{d}V$$

其中 r^i 和 r_k 分别为矢径 $\boldsymbol{r}$ 的逆变分量和协变分量。注意到 $\omega^i = \delta^i_k \omega^k$，且 $\boldsymbol{\omega}$ 是整个刚体的转动角速度，对刚体内的每一点都是相同的，所以上式可写成

$$L^i = \omega^k \int_B \rho [\delta^i_k r^m r_m - r^i r_k] \mathrm{d}V = I^{i}_{\cdot k} \omega^k \tag{d}$$

其中

$$I^{i}_{\cdot k} = \int_B \rho [\delta^i_k r^m r_m - r^i r_k] \mathrm{d}V \tag{e}$$

由式(e) 可以看到，$I^{i}_{\cdot k}$ 和任意角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 点积后，总能得到动量矩矢量 $\boldsymbol{L}$。根据商法则，可知 $I^{i}_{\cdot k}$ 一定是个二阶张量，式(d) 可写成

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{f}$$

为了说明张量 $\boldsymbol{I}$ 的物理意义，我们在笛卡尔坐标系中写出其分量。此时上下标无差别(下一章将会说明)。

$$r^i = r_i = r_i(x, y, z)$$

当 $i = k$ 时，由式(e) 得

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_B \rho (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \mathrm{d}V = \int_B \rho (y^2 + z^2) \mathrm{d}V = I_{xx} \\ I_{22} &= \int_B \rho (x^2 + y^2 + z^2 - y^2) \mathrm{d}V = \int_B \rho (z^2 + x^2) \mathrm{d}V = I_{yy} \\ I_{33} &= \int_B \rho (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) \mathrm{d}V = \int_B \rho (x^2 + y^2) \mathrm{d}V = I_{zz} \end{aligned} \tag{g}$$

当 $i \neq k$ 时，有

$$\begin{aligned} I_{12} &= I_{21} = -\int_B \rho xy \mathrm{d}V = -I_{xy} \\ I_{23} &= I_{32} = -\int_B \rho yz \mathrm{d}V = -I_{yz} \\ I_{31} &= I_{13} = -\int_B \rho zx \mathrm{d}V = -I_{zx} \end{aligned} \tag{h}$$

以上各式表明，张量的对角分量就是理论力学中所定义的惯性矩 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}；而非对角分量为惯性积 I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} 的负值。所以通常把 $\boldsymbol{I}$ 称为**惯性矩张量**，它是一个对称二阶张量。

习 题 一

1.1　在三维欧氏空间中，写出下列和式的所有项：

(a) $a_{ij}x^ix^j$；　(b) $a_i^{\cdot i}x_jx^j$；　(c) $(a_ix^i)^2$。

1.2　写出下列各式的运算结果，并指出是几阶张量。

(a) $\delta_j^k a_k$；　(b) $\delta_k^i a_i a^k a_j$；　(c) $\delta_j^i A_{i\cdot\cdot k}^{\cdot j}\delta_l^k$；　(d) $\delta_j^i A_{ik}A^{jl}\delta_l^k$。

1.3　已知一斜角直线坐标系的协变基矢量是

$$\boldsymbol{g}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是直角笛卡尔坐标系的单位基矢量(下同)。

(a) 求出它的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ 的直角坐标表达式。

(b) 求斜角坐标为(1,1,1)和(1,2,3)的两点间的距离。

1.4　对于上题给出的协变基矢量，已知矢量 $\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i = a_i\boldsymbol{g}^i$ 的一种分量，求另一种分量。

(a) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1$；

(b) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$；

(c) $a^1 = 1, a^2 = -1, a^3 = 1$；

(d) $a^1 = 2, a^2 = 0, a_3 = 1$。

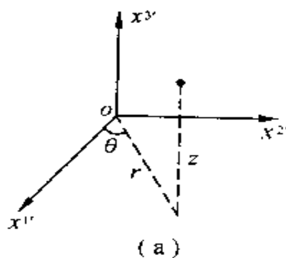
1.5　已知：(1) 圆柱坐标系如图 1－10(a)，且 $r = x^1, \theta = x^2, z = x^3$；(2) 球坐标系如图 1－10(b)，且 $r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$。

求：两种坐标系中，

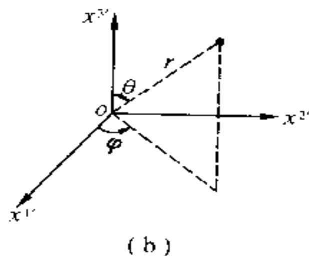
(a) $\boldsymbol{g}_i$ 的直角坐标系表达式；

(b) $\boldsymbol{g}^i$ 的直角坐标系表达式；

(c) g_{ij} 和 g^{ij}。



(a)



(b)

图 1－10

1.6　写出圆柱坐标系 x^i 与直角笛卡尔坐标系 $x^{i'}$ 的坐标变换,并求出它们的变换系数 $\beta^i_{i'}$ 和 $\beta^{i'}_i$。

1.7　写出球坐标系 x^i 与直角坐标系 $x^{i'}$ 的坐标变换,并求出它们的变换系数 $\beta^i_{i'}$ 和 $\beta^{i'}_i$。

1.8　已知直角笛卡尔坐标系中矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 $v^{1'},v^{2'},v^{3'}$,求在圆柱坐标系中 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1,v^2,v^3。

1.9　已知直角笛卡尔坐标系中矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 $v^{1'},v^{2'},v^{3'}$,求在球坐标系中 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1, v^2,v^3。

1.10　已知一斜角直线坐标系,其协变基矢量为

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

求:它的度量张量 g_{ij} 和 g^{ij}。

1.11　对于任意二阶张量 $\boldsymbol{S}$,任意矢量 $\boldsymbol{v}$,证明:

(a) $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}_c$;

(b) $(\boldsymbol{S}_c\cdot\boldsymbol{s})_c = \boldsymbol{S}_c\cdot\boldsymbol{S}$。

1.12　已知:$\boldsymbol{N}$ 为对称二阶张量,$\boldsymbol{\Omega}$ 为反对称二阶张量,$\boldsymbol{u}$ 为任意矢量。证明:

(a) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}$;

(b) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u}$。

1.13　已知:一个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的对应矩阵和度量张量矩阵分别为

$$[T^{ij}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix},\ [g_{ij}] = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

求:张量 $\boldsymbol{T}$ 的相应矩阵 $[T^{i}_{\cdot j}]$ 和 $[T_i^{\cdot j}]$。

1.14　已知两个任意二阶张量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}$。证明:$T^{ij}S_{ij} = T_{ij}S^{ij}$。

1.15　已知:二阶对称张量 $\boldsymbol{N}$,二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$。证明:$\boldsymbol{N}:\boldsymbol{\Omega} = 0$。

1.16　已知:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意矢量,$\boldsymbol{N}$ 为二阶对称张量,$\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量。求证:

(a) $\boldsymbol{N}:\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}:\boldsymbol{N}$;

(b) $\boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{ab} = -\boldsymbol{ba}:\boldsymbol{\Omega}$。

1.17　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 为矢量。求证

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

1.18　已知一个四阶张量 $\boldsymbol{S} = \delta^{ip}_{jq}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^q$,其中

$$\delta^{ip}_{jq} = \delta^i_j\delta^p_q - \delta^i_q\delta^p_j$$

设 $\boldsymbol{C}$ 为任意二阶张量

$$\boldsymbol{C} = c_{rs}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s$$

求证:$\frac{1}{2}\boldsymbol{S}:\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}:\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(c_{rs} - c_{sr})\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s$。

1.19　已知一个六阶张量 $\boldsymbol{V} = \delta^{ijk}_{lmn}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^n$,其中

$$\delta^{ijk}_{lmn} = \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 为任意一个五阶张量

$$\boldsymbol{T} = T^{rst}{}_{\cdots pq}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}_t\boldsymbol{g}^p\boldsymbol{g}^q$$

求证：$\frac{1}{6}\boldsymbol{V} \vdots \boldsymbol{T} = \frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn}T^{lmn}{}_{\cdots pq}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^p\boldsymbol{g}^q$ 对上标 i, j, k 的任意两个指标均为反对称。

1.20 已知：矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 互为反偶，即满足 $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega}$，矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。求证：$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$。

2　笛卡尔张量

2.1　笛卡尔张量概述

在上一章里，我们已经多次讲过，张量是一个与坐标系无关的几何量或物理量。但是要识别它或者要进行计算，又往往离不开坐标系。特别是对于二阶或更高阶的张量，很难直观地描述它，甚至对它的定义都离不开坐标系。在处理具体问题时，我们当然希望能取这样的坐标系，使得运算越简单越好。对于三维欧氏空间来说，这样的坐标系莫过于笛卡尔坐标系。因此，本章着重讨论张量在笛卡尔坐标系中的表示法及其运算。这时我们把所讨论的张量称为**笛卡尔张量**。

引进笛卡尔张量固然使张量的运算变得简单，但更重要的意义还在于：一切张量方程，只要是在欧氏空间中讨论的，都只需在笛卡尔坐标系中证明成立即可。对于用分量记法表示的张量方程，把它写成不变性记法，就可以把它推广到任何其他坐标系中。因此，讨论笛卡尔张量，在理论上也是很有意义的。

另外，考虑到在实际应用中，特别是在连续介质力学中最常遇到的一类张量，例如应力张量、应变张量、惯性矩张量等都是二阶张量。虽然它们各自具有完全不同的物理意义，但却服从二阶张量的共同性质。因此，本章重点研究二阶笛卡尔张量。

设 $x^i(i=1,2,3)$ 是三维欧氏空间的正交笛卡尔坐标系（一般总取右手系），沿坐标轴正向依次取单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 构成一组协变基矢量，称之为标准正交基。设它们的逆变基矢量为 $\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^3$，由于需满足对偶条件 $\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_j^i$，因此不难看出

$$\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_i\quad(i=1,2,3)\tag{2.1.1}$$

这说明，在笛卡尔坐标系中，逆变基矢量与协变基张量是完全重合的，不仅标架相同，而且指标也一致，所以在笛卡尔张量中，就没有必要再区分逆变基矢量和协变基矢量了，就称为**基矢量或标准正交基**。

再来考虑坐标变换。当把正交笛卡尔坐标系 x^i 变换到另一个正交笛卡尔坐标系 $x^{i'}$ 时，设新坐标系下的协变基矢量为 $\boldsymbol{e}_{i'}$，而逆变基矢量为 $\boldsymbol{e}^{i'}$，其变换关系为

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{e}_i\quad 和\quad \boldsymbol{e}^{i'}=\beta_i^{i'}\boldsymbol{e}^i$$

但由于在新坐标系下也有 $\boldsymbol{e}^{i'}=\boldsymbol{e}_{i'}$ 成立，因此

$$\beta_{i'}^{i}=\beta_i^{i'}\tag{2.1.2}$$

说明协变转换系数和逆变转换系数在笛卡尔正交坐标系中是相同的。

根据上面的讨论可知，每个笛卡尔坐标系都只需取一组单位正交基，张量的分量也只取一组，因为此时协变张量、逆变张量和混变张量实际上是相同的。因此在本章以后的讨论中，一律只取下标表示，而运算法则不变。

这样，我们可以把正交笛卡尔坐标系 x^i 记做 x_i，新正交笛卡尔坐标系 $x^{i'}$ 也记做 $x_{i'}$，协变转换系数 $\beta_{i'}^{i}$（或逆变转换系数 $\beta_i^{i'}$）记做 a_{ij}，由于笛卡尔坐标系之间的变换是线性的，所以当

新老坐标系的原点相同时，其变换形式可作以下表示

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(2.1.3a)

或写成

$$x'_i = a_{ij}x_j \quad 或 \quad x_i = a_{ji}x'_j \tag{2.1.3b}$$

在新老坐标系下分别取定标准正交基 e'_i 和 e_i，则它们之间的变换关系可写成

$$e'_i = a_{ij}e_j \quad 或 \quad e_i = a_{ji}e'_j \tag{2.1.4}$$

也可以把变换系数写成矩阵形式，记为 $\boldsymbol{A}$，即

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.1.5}$$

下面我们来看看矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有什么特点。因为其转置矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

再看看上面矩阵的每一项。因为由式(2.1.4)，有

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

$$e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$$

$$e'_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3$$

而 e'_i 为标准正交基，故有

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$

又因为 $e'_1 \perp e'_2, e'_1 \perp e'_3, e'_2 \perp e'_3$，即 $e'_1 \cdot e'_2 = e'_1 \cdot e'_3 = e'_2 \cdot e'_3 = 0$，所以有

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

$$a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

最后可得

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \tag{2.1.6}$$

所以矩阵 A 为正交阵,上式中的 I 是单位矩阵。写成分量形式

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \quad 或 \quad a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \tag{2.1.7}$$

这里的 δ_{jk} 和 δ_{ik} 都是 Kronecker δ,其意义与前面是一样的,所不同的只是在笛卡尔坐标下指标都写成下标罢了。

由于笛卡尔张量的分量只有一组,所以任意阶笛卡尔张量的并基展开式也只有一种,即

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k \tag{2.1.8}$$

若张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在新坐标系 x'_i 下的分量为 $\phi'_{ij\cdots k}$,则张量分量的变化规律为

$$\phi'_{ij\cdots k} = a_{ip}a_{jq}\cdots a_{kr}\phi_{pq\cdots r} \tag{2.1.9a}$$

特别对于二阶笛卡尔张量 T_{ij} 有

$$T'_{ij} = a_{ip}a_{jq}T_{pq} \tag{2.1.10a}$$

利用式(2.1.7),也可以写出它的反演公式

$$T_{ij} = a_{pi}a_{qj}T'_{pq} \tag{2.1.10b}$$

这里需注意,在式(2.1.10a) 中,变换系数的第一个指标为自由指标,而在式(2.1.10b) 中,变换系数的第二个指标为自由指标。按此规律,可以写出任意阶笛卡尔张量的变换公式及其反演公式,如式(2.1.9a) 的反演公式为

$$\phi_{ij\cdots k} = a_{pi}a_{qj}\cdots a_{rk}\phi'_{pq\cdots r} \tag{2.1.9b}$$

在笛卡尔坐标系中,度量张量 g_{ij} 为

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.1.11a}$$

写成矩阵形式

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.11b}$$

显然

$$g = |g_{ij}| = |\delta_{ij}| = 1 \tag{2.1.12}$$

也就是说,在笛卡尔坐标系中

$$G = I \tag{2.1.13}$$

再来看看笛卡尔坐标系下的置换张量(Edington 张量)

$$\varepsilon_{ijk} = [\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{e}_k] = \begin{cases} 1, & 当\ ijk\ 为偶排列时 \\ -1, & 当\ ijk\ 为奇排列时 \\ 0, & 当\ ijk\ 至少要有两个相等时 \end{cases} \tag{2.1.14}$$

在笛卡尔坐标系中,矢量的基展开式是我们熟知的,设有两个矢量

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i$$

两矢量的点积

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_iv_i \tag{2.1.15}$$

两矢量的叉积设为 $\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$,则有

$$a_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \tag{2.1.16}$$

另设矢量 $\boldsymbol{w} = w_i \boldsymbol{e}_i$,则三个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的混合积为

$$[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k \tag{2.1.17}$$

广义 Kronecker δ 也可以写成

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{rst} = \begin{bmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{bmatrix} \tag{2.1.18}$$

且有

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks} \tag{2.1.19}$$

以上都是张量公式在笛卡尔坐标系中的表示形式,当然上一章最后一节中定义的各种张量代数运算也都适用于笛卡尔坐标系,只是其分量记法都用下标。

最后我们引入关于行列式的计算公式。在笛卡尔坐标系中,以下行列式可以写作

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \tag{2.1.20}$$

这个公式以后会经常用到。

例 2.1 有一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 在坐标系 x_i 下可表示为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

如果一新坐标系 x'_i 与老坐标系 x_i 之间的变换形式为

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

其中变换系数所组成的矩阵为

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

试求矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系 x'_i 下的表达式。

解 因为

$$v'_i = a_{ij} v_j$$

所以

$$\begin{aligned} v'_1 &= a_{1j} v_j = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ v'_2 &= a_{2j} v_j = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$v'_3 = a_{3j}v_j = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot 2 + \frac{2\sqrt{6}}{6}\cdot(-1)$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

因此矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系 x'_i 下的表达式为

$$\boldsymbol{v} = v'_i\boldsymbol{e}'_i = \frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}'_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}'_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{e}'_3$$

例 2.2 一个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 在坐标系 x_i 下的表达式为

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2$$

如果一新坐标系 x'_i 与老坐标系 x_i 之间的变换形式为

$$x'_i = a_{ij}x_j$$

其中变换系数所组成的矩阵为

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试求二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 在新坐标系 x'_i 下的表达式。

解 由式(2.1.10a)

$$T'_{ij} = a_{ip}a_{jq}T_{pq}$$

所以

$$T'_{11} = a_{1p}a_{1q}T_{pq} = a_{13}a_{13}T_{33} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$
$$T'_{12} = a_{1p}a_{2q}T_{pq} = a_{13}a_{21}T_{31} = 1\cdot(-1)\cdot(-3) = 3$$
$$T'_{13} = a_{1p}a_{3q}T_{pq} = a_{13}a_{32}T_{32} = 1\cdot 1\cdot(-2) = -2$$
$$T'_{21} = a_{2p}a_{1q}T_{pq} = a_{21}a_{13}T_{13} = (-1)\cdot 1\cdot 3 = -3$$
$$T'_{22} = a_{2p}a_{2q}T_{pq} = a_{21}a_{21}T_{11} = (-1)\cdot(-1)\cdot 0 = 0$$
$$T'_{23} = a_{2p}a_{3q}T_{pq} = a_{21}a_{32}T_{12} = (-1)\cdot 1\cdot(-1) = 1$$
$$T'_{31} = a_{3p}a_{1q}T_{pq} = a_{32}a_{13}T_{23} = 1\cdot 1\cdot 2 = 2$$
$$T'_{32} = a_{3p}a_{2q}T_{pq} = a_{32}a_{21}T_{21} = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1$$
$$T'_{33} = a_{3p}a_{3q}T_{pq} = a_{32}a_{32}T_{22} = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

因此二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 在新坐标系 x'_i 下的表达式为

$$\boldsymbol{T} = T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j = 3\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2 - 2\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_3 - 3\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3 + 2\boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_3\boldsymbol{e}'_2$$

2.2 矢量和二阶张量的对应矩阵及其运算

在笛卡尔坐标系下，张量只对应于一组分量，所以将其分量用一种特殊的形式表示是很有用的，特别是在许多情况下，将矢量和二阶张量用矩阵形式表示会在运算中带来许多方

便。

2.2.1 矢量和二阶张量的对应矩阵

设在笛卡尔坐标系 x_i 下的标准正交基为 $\boldsymbol{e}_i$,则任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 可表示为

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i$$

我们取行矩阵

$$[u_i] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \tag{2.2.1}$$

把它称为矢量 $\boldsymbol{u}$ 在标架 $\boldsymbol{e}_i$ 下的**对应矩阵**。

对于任意二阶张量 $\boldsymbol{D}$,在笛卡尔坐标系 x_i 下的并基展开式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} = & D_{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + D_{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + D_{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ & + D_{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + D_{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + D_{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ & + D_{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + D_{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + D_{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

我们取方阵 $\boldsymbol{D} = [D_{ij}]$,有

$$\boldsymbol{D} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

把它称为二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 在标架 $\boldsymbol{e}_i$ 下的**对应矩阵**。

2.2.2 二阶张量的转置,对称、反对称张量及其所对应的矩阵

二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 的转置张量 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 即为它的共轭张量 $\boldsymbol{D}_c$,很显然它的对应矩阵为

$$\boldsymbol{D}_c = [D_{ji}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

另外,当然有

$$(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D} \tag{2.2.4}$$

如果张量 $\boldsymbol{N}$ 为二阶对称张量,则

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}_c \tag{2.2.5a}$$

其对应矩阵有

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \quad 或 \quad N_{ij} = N_{ji} \tag{2.2.5b}$$

如果张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量,则

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\Omega}_c \tag{2.2.6a}$$

其对应矩阵有

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \quad 或 \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \tag{2.2.6b}$$

另外,我们把二阶张量

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.2.7a}$$

称为**单位二阶张量**。显然,$\boldsymbol{I}$ 的对应矩阵在任何正交笛卡尔坐标系下都是单位矩阵,即

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.7b}$$

实际上,在笛卡尔坐标系下,单位二阶张量 $\boldsymbol{I}$ 就是笛卡尔度量张量 $\boldsymbol{G}$,只是在这里把它称之为单位二阶张量有其特殊作用。

2.2.3 二阶张量的代数运算与矩阵的代数运算

1. 张量的相等、相加、标量和张量的相乘运算与矩阵的运算一一对应

2. 坐标变换

设新坐标系 x'_i 下的标准正交基为 $\boldsymbol{e}'_i$,坐标变换满足式(2.1.4),转换系数矩阵由式(2.1.5)表示为 $\boldsymbol{A}$。

在新标架 $\boldsymbol{e}'_i$ 下矢量 $\boldsymbol{u}$ 的对应矩阵为

$$[u'_i] = [u'_1 \quad u'_2 \quad u'_3]$$

由张量变换规律知

$$u'_i = a_{ij}u_j \tag{2.2.8a}$$

写成矩阵形式

$$[u'_i]^{\mathrm{T}} = [a_{ij}][u_j]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}[u_j]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.8b}$$

在新标架 $\boldsymbol{e}'_i$ 下二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{D}' = [D'_{ij}] = \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{bmatrix}$$

它的坐标变换规律为式(2.1.10a),即

$$D'_{ij} = a_{ip}a_{jq}D_{pq} \tag{2.2.9a}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{D}' = [D'_{ij}] = [a_{ip} \quad a_{jq} \quad D_{pq}] = [a_{ip}][D_{pq}][a_{jq}]^{\mathrm{T}}$$

即

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{ADA}^{\mathrm{T}} \tag{2.2.9b}$$

例 2.3 试用矩阵运算例 2.1。

解 矢量 $\boldsymbol{v}$ 在老坐标系 x_i 下的对应矩阵为

$$[v_i] = [1 \quad 2 \quad -1]$$

由式(2.2.8b)可知

$$[v'_i]^{\mathrm{T}} = [a_{ij}][v_j]^{\mathrm{T}}$$

即

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

所以矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标 x'_i 下的对应矩阵为

$$[v'_i] = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

显然用矩阵运算是很方便的。

例 2.4 试用矩阵运算例 2.2。

解 二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 在老坐标系中的对应矩阵为

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

而变换系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由式(2.2.9b)有

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$[T'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 二阶张量与矢量的点积——线性变换

二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 右边点积矢量 $\boldsymbol{u}$,得到一个新矢量 $\boldsymbol{v}$,即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.2.10a}$$

写成分量的形式为

$$v_i = D_{ij}u_j \tag{2.2.10b}$$

同样写成矩阵形式为

$$[v_i]^{\mathrm{T}} = [D_{ij}][u_j]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.10c}$$

若二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 在左边点积矢量 $\boldsymbol{u}$,得到一个新矢量 $\boldsymbol{w}$,即

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{D} \tag{2.2.11a}$$

写成分量形式为

$$w_j = u_i D_{ij} \tag{2.2.11b}$$

写成矩阵形式为

$$[w_j]^{\mathrm{T}} = [D_{ij}][u_i]^{\mathrm{T}} \tag{2.2.11c}$$

当然,点积具有线性性质,即

$$\boldsymbol{T} \cdot (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \tag{2.2.12}$$

式中,α,β 为任意常数;$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 为任意矢量;$\boldsymbol{T}$ 为二阶张量。

所以,与矩阵相同,二阶张量也对应于一个线性变换,即映射。每一个二阶张量都定义了将矢量空间的任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 映射为另一矢量 $\boldsymbol{v}$ 的线性变换。

4. 二阶张量与二阶张量的点积

二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 点积,得到一个新的二阶张量 $\boldsymbol{H}$,即

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \tag{2.2.13a}$$

写成分量形式为

$$D_{ij}E_{jk} = H_{ik} \tag{2.2.13b}$$

写成矩阵形式为

$$DE = H \tag{2.2.13c}$$

还应注意到，如同矩阵相乘的次序不能互换一样，二阶张量点积的顺序也是不能交换的。

5.单位二阶张量与二阶张量的逆张量

前面我们已经定义了单位二阶张量，如式(2.2.7a)，它在张量运算中的特殊作用是，对于任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 和任意二阶张量 $\boldsymbol{D}$，恒有

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{u} \tag{2.2.14}$$

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{D} \tag{2.2.15}$$

利用矩阵表示法，是容易看出来的。

如果两个二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 满足

$$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} \tag{2.2.16a}$$

这时它们的对应矩阵也满足

$$DE = ED = I \tag{2.2.16b}$$

这样矩阵 D 和 E 是可逆的，这时我们称二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是互逆的。记做

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}^{-1} \quad 或 \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}^{-1} \tag{2.2.17}$$

显然，二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 存在逆张量 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 的充分必要条件是对应矩阵 D 是满秩的。

6.二阶张量的幂

我们定义二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 的点积称为 $\boldsymbol{D}$ 的 2 次幂，用 $(\boldsymbol{D})^2$ 表示，即

$$(\boldsymbol{D})^2 = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D} \tag{2.2.18}$$

类似地，也可以定义二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 的 3 次幂、4 次幂以及任意的 n 次幂

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{D})^3 &= (\boldsymbol{D})^2 \cdot \boldsymbol{D} \\ (\boldsymbol{D})^4 &= (\boldsymbol{D})^3 \cdot \boldsymbol{D} \\ &\cdots \\ (\boldsymbol{D})^n &= (\boldsymbol{D})^{n-1} \cdot \boldsymbol{D} \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

显然，$(\boldsymbol{D})^2, (\boldsymbol{D})^3, (\boldsymbol{D})^4, \cdots, (\boldsymbol{D})^n$ 所对应的矩阵应是

$$D^2, D^3, D^4, \cdots, D^n$$

在这里 n 是正整数。对于可逆的二阶张量 $\boldsymbol{D}$，可以定义

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{D})^0 &= \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{I} \\ (\boldsymbol{D})^{-1} &= \boldsymbol{D}^{-1} \\ (\boldsymbol{D})^{-2} &= (\boldsymbol{D}^{-1})^2 \\ &\cdots \\ (\boldsymbol{D})^{-n} &= (\boldsymbol{D}^{-1})^n \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

因此，对可逆的二阶张量可以定义它的所有整数次幂。但是，二阶张量的有些运算没有相应的矩阵运算，例如并乘运算。

总之，虽然矩阵与二阶张量属于两种不同的概念，但一个二阶张量总可以在一定的坐标系下将其某种分量用矩阵表示，于是二阶张量的一些运算就可以表示成对应的矩阵运算，这样许多关于矩阵的理论就可以推广应用到二阶张量。

2.3 二阶张量的主值、主方向和主不变量

定义 设 $\boldsymbol{T}$ 是一个二阶张量,如果存在标量 λ 和非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 使得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u} \tag{2.3.1}$$

成立,那么标量 λ 称为二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的主值,非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 称为 $\boldsymbol{T}$ 对应于主值 λ 的主方向。

在式(2.3.1)中,主方向 $\boldsymbol{u}$ 的模 $|\boldsymbol{u}|\neq 0$。故取

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$$

代入式(2.3.1)有

$$\boldsymbol{T}\cdot|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{n}=\lambda|\boldsymbol{u}|\boldsymbol{n}$$

即得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n}\quad 或\quad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}-\lambda\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0} \tag{2.3.2}$$

利用单位二阶张量 $\boldsymbol{I}$ 的性质 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}$,代入式(2.3.2)

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}-\lambda\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

即得

$$(\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0} \tag{2.3.3}$$

设在笛卡尔坐标系 x_i 下,有

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{e}_i$$

则式(2.3.3)所对应的矩阵方程是

$$[T_{ij}-\lambda\delta_{ij}][n_j]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0} \tag{2.3.4a}$$

展开上式

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.4b}$$

因为 $\boldsymbol{n}$ 为单位矢量,因而

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1 \tag{2.3.5}$$

式(2.3.4)表明,二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的主值和对应于主值的主方向就是 $\boldsymbol{T}$ 的对应矩阵 $\boldsymbol{T}=[T_{ij}]$ 的特征值和对应于特征值的特征向量。也就是说,求二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的主值和主方向的问题就转化成矩阵理论中的问题了。

很明显,要使式(2.3.4)有非零解 n_i 存在的充分必要条件是系数行列式

$$|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0 \tag{2.3.6a}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix}=0 \tag{2.3.6b}$$

上式是一个关于未知数 λ 的一元三次方程,即其左端是 λ 的三次多项式。下面我们考察

一下这个三次多项式在坐标变换时的情形。

在坐标变换下，二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的对应矩阵满足坐标变换规律式(2.2.9b)，即有

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

另外

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{T}' - \lambda\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \\ &= |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \\ &= |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \\ &= |\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}|\end{aligned}$$

上式说明，这个关于 λ 的三次多项式与坐标系的选取是无关的。

现在，我们将式(2.3.6) 展开

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_T\lambda^2 + \mathrm{II}_T\lambda - \mathrm{III}_T = 0 \tag{2.3.7}$$

这就是矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的特征方程，由于它在坐标变换下是不变的，故也把它称为二阶笛卡尔张量 $\boldsymbol{T}$ **的特征方程**。

不难验证式(2.3.7) 中的三个系数分别是

$$\mathrm{I}_T = T_{ii} = \mathrm{tr}\boldsymbol{T} \quad (\text{即 } \boldsymbol{T} \text{ 的迹}) \tag{2.3.8a}$$

$$\mathrm{II}_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \tag{2.3.8b}$$

$$\mathrm{III}_T = |T_{ij}| = \det\boldsymbol{T} \quad (\text{行列式的值}) \tag{2.3.8c}$$

我们把这三个系数分别叫做 $\boldsymbol{T}$ **的第一、第二和第三主不变量**。

可以把它们展开成

$$\mathrm{I}_T = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{2.3.8a'}$$

$$\mathrm{II}_T = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{2.3.8b'}$$

$$\mathrm{III}_T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{2.3.8c'}$$

一个二阶张量 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，在坐标变换时其分量和基矢量都会变换，从而保证了它的不变性。但如果对这些随坐标转换而变化的张量分量进行一定的运算(例如：这些运算可以由 n 个 $\boldsymbol{T}$ 自身进行，也可由 $\boldsymbol{T}$ 与度量张量 $\boldsymbol{G}$ 或置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 进行)，就可以得到一些不随坐标转换而变化的标量，这种标量就称为张量的不变量。

例如，我们来看度量张量 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的双点积。

$$\boldsymbol{G} : \boldsymbol{T} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : T_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l = \delta_{ij}T_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} = \delta_{ij}T_{ij} = T_{ii}$$

$$\boldsymbol{G} \cdot\cdot \boldsymbol{T} = \delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \cdot\cdot T_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l = \delta_{ij}T_{kl}\delta_{jk}\delta_{il} = \delta_{ij}T_{ji} = T_{ii}$$

很显然，我们上面的 $\boldsymbol{T}$ 的第一主变量 I_T 恰恰就是度量张量 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的双点积。即

$$\mathrm{I}_T = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{G} \cdot\cdot \boldsymbol{T} = T_{ii} = \mathrm{tr}\boldsymbol{T} \tag{2.3.9}$$

而

$$\mathrm{II}_T = \frac{1}{2}\delta^{ij}_{kl}T_{ki}T_{lj} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})T_{ki}T_{lj}$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}T_{ki}T_{lj} - \delta_{il}\delta_{jk}T_{ki}T_{lj})$$

$$= \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \tag{2.3.10}$$

$$\mathrm{III}_T = \frac{1}{3!}\delta_{ijklmn}T_{li}T_{mj}T_{nk}$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}T_{li}T_{mj}T_{nk} = \det \boldsymbol{T} \tag{2.3.11}$$

下面我们来研究二阶张量的幂的主值和主方向。

由于二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的主值 λ 和主方向 $\boldsymbol{n}$ 满足

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{n}$$

我们用 $\boldsymbol{T}$ 来点积上式两端,得

$$(\boldsymbol{T})^2\cdot\boldsymbol{n} = \lambda\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n} = \lambda(\lambda\boldsymbol{n}) = \lambda^2\boldsymbol{n} \tag{2.3.12}$$

这说明 $\boldsymbol{T}$ 的 2 次幂$(\boldsymbol{T})^2$ 的主值为 λ^2,而对应的主方向仍为 $\boldsymbol{n}$。进一步推广,我们可以得到

$$(\boldsymbol{T})^m\cdot\boldsymbol{n} = \lambda^m\boldsymbol{n} \tag{2.3.13}$$

式中,m 为正整数。上式说明,$\boldsymbol{T}$ 的 m 次幂$(\boldsymbol{T})^m$ 的主值为 λ^m,对应于这个主值的主方向仍是 $\boldsymbol{n}$。

2.4 二阶对称张量

三维空间中一个二阶实张量的 9 个分量都是实数,当进行坐标转换时,这 9 个分量将发生变化,本节讨论当坐标转换至什么情况下,此二阶张量化为标准形的问题。求标准形的问题在力学和物理中有着广泛的应用。例如一点的应力状态,根据它的 9 个应力分量通过坐标转换求主应力和主方向的问题,还有惯性矩问题和应变等。

设 $\boldsymbol{N}$ 是二阶对称张量,则满足 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_c$,若设此二阶对称张量为 $\boldsymbol{N} = N_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$,则有

$$N_{ij} = N_{ji}$$

其对应矩阵 $\boldsymbol{N} = [N_{ij}]$ 满足

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$$

在进行坐标变换时,二阶对称张量 $\boldsymbol{N}$ 的对称性保持不变。事实上,经坐标变换(变换系数矩阵设为 $\boldsymbol{A}$)后,$\boldsymbol{N}$ 对应的矩阵变为$\boldsymbol{ANA}^{\mathrm{T}}$,故而仍保持 $\boldsymbol{N}$ 具有对称性。

二阶对称张量还有个重要的性质,即 $\boldsymbol{N}$ 所对应的线性变换满足

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N} \tag{2.4.1}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 为任意矢量。

证明　式(2.4.1) 左端

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u} = N_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot u_k\boldsymbol{e}_k$$

$$= N_{ij}u_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i$$

$$= N_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$$

而它的右端

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N} = u_k\boldsymbol{e}_k\cdot N_{ji}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$$

$$= u_k N_{ji} \delta_{kj} \boldsymbol{e}_i$$
$$= N_{ji} u_j \boldsymbol{e}_i$$

因为 $\boldsymbol{N}$ 是对称二阶张量,所以有

$$N_{ij} = N_{ji}$$

因此,式(2.4.1) 左右两端相等,即

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}$$

定义 二阶实对称张量的特征方程存在三个实根,其对应的三个主方向必正交。

证明 设实对称二阶张量的特征方程 $|N_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$ 存在一个复根 λ,由于其特征方程的系数全为实数,故 λ 的共轭复数 $\bar{\lambda}$ 也必定是特征方程的另一个根。如果 λ 对应的特征矢量为 $\boldsymbol{n}$,而 $\bar{\lambda}$ 所对应的特征矢量为 $\bar{\boldsymbol{n}}$,因为

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n} \tag{a}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\lambda} \bar{\boldsymbol{n}} \tag{b}$$

将 $\bar{\boldsymbol{n}}$ 点积式(a),将 $\boldsymbol{n}$ 点积式(b),得

$$\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} \tag{c}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = \bar{\lambda} \boldsymbol{n} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} \tag{d}$$

由于 $\boldsymbol{N}$ 是对称张量,故式(c)、式(d) 的左端相等,即

$$\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}$$

这样式(c)、式(d) 两式的右端也应相等,即

$$\lambda \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{n} - \bar{\lambda} \boldsymbol{n} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = 0$$

亦即

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \boldsymbol{n} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} = 0$$

因为

$$\boldsymbol{n} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} \neq 0$$

所以

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0$$

即 λ 必为实数。

这就证明了二阶实对称张量必存在三个实的主值。

当对称二阶张量具有 3 个不等的主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 时,所对应的 3 个主方向设为 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3$。由特征方程知如下三式成立:

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n}_1 \tag{a}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}_2 \tag{b}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_3 = \lambda_3 \boldsymbol{n}_3 \tag{c}$$

将 $\boldsymbol{n}_2$ 点积式(a),将 $\boldsymbol{n}_1$ 点积式(b),得

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{n}_1 \tag{d}$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 \tag{e}$$

考虑到 $\boldsymbol{N}$ 是对称的,故式(d),式(e) 的左端相等,即

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{n}_2$$

这样式(d),式(e) 的右端也应相等,即

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$$

因为 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以必有

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$$

也就是说，主方向 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 互相垂直。

同理，可以证明，三个不等的主值所对应的三个主方向互相正交。

当对称二阶张量的特征方程具有两个相等的实根时，设 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$，与 λ_3 对应的主方向 $\boldsymbol{n}_3$ 是一个确定的主方向，与 $\boldsymbol{n}_3$ 垂直的平面内任意方向均是主方向，可任取其中 2 个相互正交的方向 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 为主方向。当对称二阶张量的特征方程具有 3 重实根时，任何方向都是主方向，此时可以任取三个相互正交的方向作为主方向。

综上所述，无论实对称二阶张量的特征方程是否有重根，总可以选择一组笛卡尔坐标系，让它的各个轴指向 3 个主方向。我们把沿着 3 个相互垂直的主方向的轴称为**主轴**，由 3 个主轴构成的笛卡尔坐标系称为**主轴系**。通常我们把主轴系记做 $ox_1^* x_2^* x_3^*$，沿此坐标系轴正向取单位矢量 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*$ 构成标准正交基。

现在考虑原坐标系 $ox_1x_2x_3$ 到主轴系 $ox_1^* x_2^* x_3^*$ 的坐标交换。由于主轴系的基矢量就是二阶张量 $\boldsymbol{N}$ 的主方向，所以可设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^* &= \boldsymbol{n}_1 = n_1^{(1)} \boldsymbol{e}_1 + n_1^{(2)} \boldsymbol{e}_2 + n_1^{(3)} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2^* &= \boldsymbol{n}_2 = n_2^{(1)} \boldsymbol{e}_1 + n_2^{(2)} \boldsymbol{e}_2 + n_2^{(3)} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3^* &= \boldsymbol{n}_3 = n_3^{(1)} \boldsymbol{e}_1 + n_3^{(2)} \boldsymbol{e}_2 + n_3^{(3)} \boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

从而可以得到由下式给出的坐标交换

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$n_1^{(1)} = a_{11}$	$n_1^{(2)} = a_{12}$	$n_1^{(3)} = a_{13}$
x_2^*	$n_2^{(1)} = a_{21}$	$n_2^{(2)} = a_{22}$	$n_2^{(3)} = a_{23}$
x_3^*	$n_3^{(1)} = a_{31}$	$n_3^{(2)} = a_{32}$	$n_3^{(3)} = a_{33}$

(2.4.3)

显然，在主轴系下，二阶对称张量 $\boldsymbol{N}$ 的并基展开式为

$$\boldsymbol{N} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1^* \boldsymbol{e}_1^* + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2^* \boldsymbol{e}_2^* + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3^* \boldsymbol{e}_3^* \tag{2.4.4}$$

对应的矩阵 $\boldsymbol{N}^*$ 应为如下对角阵

$$\boldsymbol{N}^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

所以，二阶对称张量在主轴系中所对应的矩阵具有最简单的标准型，如式(2.4.5)。

在前面我们已经了解二阶张量的 m 次幂(m 为正整数)。一个二阶对称张量 $\boldsymbol{N}$ 的 m 次幂仍然是二阶对称张量，并且它的主值是 $\boldsymbol{N}$ 的主值的 m 次方，即 $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m$，而它的主方向与 $\boldsymbol{N}$ 的主方向相同。

下面再进一步推广。对于常正的二阶对称张量 $\boldsymbol{N}$(指 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不小于零的情形)还可定义$(\boldsymbol{N})^{\frac{1}{2}}$ 如下：先把常正的 $\boldsymbol{N}$ 变换到主轴形式，把 $\boldsymbol{N}$ 看成是张量$(\boldsymbol{N})^{\frac{1}{2}}$ 的 2 次幂，即在主轴系下$(\boldsymbol{N})^{\frac{1}{2}}$ 具有如下形式的对应矩阵

$$\sqrt{N^*}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3}\end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

再把它变换到原来的坐标系，即可得$(N)^{\frac{1}{2}}$ 在原来坐标系下的九个分量。在这里对主值开方后都取正值，这样$(N)^{\frac{1}{2}}$ 是惟一确定的，且保持常正性质。它的对应矩阵可写成$\sqrt{N}$。

对称二阶张量的标准型的应用是很多的，下面举几个例子。

例 2.5 连续介质力学中最常用的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$、应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 等都是对称二阶张量。从本节的分析可知，对于三维空间中任意的应力(或应变)状态，必定都存在三个互相正交的主方向，在此方向上，只有正应力(或正应变)，而没有剪应力(或剪应变)，把它称为主应力(或主应变)。

例 2.6 前面例1.11中已证明惯性矩张量 $\boldsymbol{I}$ 是对称二阶张量。任取一组3个正交标准化基，$\boldsymbol{I}$ 的6个分量(3个惯性矩和3个惯性积)随坐标轴旋转而变化，必定存在3个惯性主轴方向，此时刚体对于这3个轴的惯性积为零。

例 2.7 设二阶对称张量 N 的对应矩阵为

$$[N_{ij}]=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求它的主值、主方向和主不变量。并且直接通过张量变换规律，验证在主轴系中的对应矩阵$[N_{ij}^*]$是对角阵。

解 先求三个主不变量

$$\mathrm{I}_N = N_{ii} = 3+3+1 = 7$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_N &= \frac{1}{2}(N_{ii}N_{jj} - N_{ij}N_{ji})\\ &= N_{11}N_{22} + N_{22}N_{33} + N_{33}N_{11} - N_{12}N_{21} - N_{23}N_{32} - N_{31}N_{13}\\ &= 3\times 3 + 3\times 1 + 3\times 1 - (-1)(-1) = 14\end{aligned}$$

$$\mathrm{III}_N = \det N = 9 - 1 = 8$$

把它代入特征方程

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_N\lambda^2 + \mathrm{II}_N\lambda - \mathrm{III}_N = 0$$

即

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

解以上方程得3个主值为

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 2,\quad \lambda_3 = 4$$

再求3个主方向，由式(2.3.4)有

$$\begin{bmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 & 0 \\ -1 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意到 $n_1^{(1)^2} + n_2^{(1)^2} + n_3^{(1)^2} = 1$,解得

$$n_1^{(1)} = 0, \quad n_2^{(1)} = 0, \quad n_3^{(1)} = 1 \quad (取正号)$$

故取主方向为

$$\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_3$$

同理可得

$$\boldsymbol{e}_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2 \quad (取正号)$$

这样就得到了由原坐标系到主轴系的坐标变换规律。

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	0	0	1
x_2^*	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
x_3^*	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

由式(2.2.9b)可得

$$[N_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

它是一个标准型,即对角阵

$$[N_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

例 2.8 设二阶对称张量 $\boldsymbol{B}$ 的对应矩阵为

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{B}$ 的平方根$\sqrt{\boldsymbol{B}}$。

解 先求其主值,由式(2.3.6b)有

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展开之,得

$$(3-\lambda)^2(9-\lambda)-4(9-\lambda)=0$$

即

$$[(3-\lambda)^2-4](9-\lambda)=0$$

解得

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\\lambda_2=5\\\lambda_3=9\end{cases}$$

在主轴系中,$\boldsymbol{B}$ 的对应矩阵为标准型对角阵,即

$$[B_{ij}^*]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

对于常正的二阶张量(指 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都不小于零),可定义$\sqrt{\boldsymbol{B}}$,它在主轴系下具有如下形式的对应矩阵,即式(2.4.6)

$$[\sqrt{B_{ij}^*}]=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&0&0\\0&\sqrt{\lambda_2}&0\\0&0&\sqrt{\lambda_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{5}&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

那么$\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 在原坐标系中该如何表达呢?因为 $\boldsymbol{B}$ 和$\sqrt{\boldsymbol{B}}$ 对应的主方向是一致的。所以下面就来求 $\boldsymbol{B}$ 的三个主方向。

对于 $\lambda_1=1$,有

$$\begin{bmatrix}3-1&2&0\\2&3-1&0\\0&0&9-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(1)}\\n_2^{(1)}\\n_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1^{(1)}\\n_2^{(1)}\\n_3^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

解得

$$n_1^{(1)}=-n_2^{(1)},n_3^{(1)}=0$$

考虑到

$$n_1^{(1)^2}+n_2^{(1)^2}+n_3^{(1)^2}=1$$

所以得

$$\begin{cases}n_1^{(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\n_2^{(1)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\n_3^{(1)}=0\end{cases}$$

同理,对于 $\lambda_2 = 5$,可以解得

$$\begin{cases} n_1^{(2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ n_2^{(2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ n_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

对于 $\lambda_3 = 9$,可以解得

$$\begin{cases} n_1^{(3)} = 0 \\ n_2^{(3)} = 0 \\ n_3^{(3)} = 1 \end{cases}$$

这样,主轴系 $ox_1^* x_2^* x_3^*$ 与原坐标系 $ox_1 x_2 x_3$ 之间的转换关系矩阵由式(2.4.3)为

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以由式(2.2.9b)有

$$\begin{aligned} \sqrt{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \sqrt{\boldsymbol{B}^*} \boldsymbol{A} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & 0 \\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) & \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.5 二阶反对称张量

2.5.1 定义

设 $\boldsymbol{D}$ 是一个二阶反对称张量,则一定满足 $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{D}_c$。若设此二阶反对称张量 $\boldsymbol{D} = D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$,则其分量必有 $D_{ij} = -D_{ji}$。其对应矩阵 $\boldsymbol{D} = [D_{ij}]$ 满足 $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$。具体写出其对应矩阵

$$\boldsymbol{D} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & 0 & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.1}$$

其中

$$D_{12} = -D_{21} \quad D_{13} = -D_{31} \quad D_{23} = -D_{32}$$

由此可以看出,二阶反对称张量只有3个独立的分量。显然,在坐标变换下,二阶反对称张量的反对称性保持不变。

二阶反对称张量 $\boldsymbol{D}$ 所对应的线性变换满足

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} \tag{2.5.2}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 为任意矢量。

证明 式(2.5.2)左端

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} &= D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot u_k\boldsymbol{e}_k \\ &= D_{ij}u_k\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i \\ &= D_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

而它的右端

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} &= -u_k\boldsymbol{e}_k\cdot D_{ji}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i \\ &= -u_kD_{ji}\delta_{kj}\boldsymbol{e}_i \\ &= -D_{ji}u_j\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{D}$ 是二阶反对称张量,所以有

$$D_{ij} = -D_{ji}$$

所以它的右端和左端相等,即

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}$$

2.5.2 反对称二阶张量的反偶矢量

定义 矢量 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 之间满足

$$\boldsymbol{w} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D} \tag{2.5.4a}$$

或

$$w_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{jk} \tag{2.5.4b}$$

则称 $\boldsymbol{w}$ 为反对称二阶张量 $\boldsymbol{D}$ 的**反偶矢量**。而把矢量 $-\boldsymbol{w}$ 称为 $\boldsymbol{D}$ 的**对偶矢量**。

反对称二阶张量也可以用其反偶矢量表示为

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{w} \quad 或 \quad D_{ij} = -\varepsilon_{ijk}w_k \tag{2.5.5}$$

还可以将 $\boldsymbol{D}$ 对任一矢量 $\boldsymbol{u}$ 所做的线性变换化为 $\boldsymbol{D}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的叉积

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u} \tag{2.5.6}$$

特别当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$ 时,有

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \tag{2.5.7}$$

下面加以证明。先看看反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 的分量表达式(2.5.4a)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k:D_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{lm}\delta_{jl}\delta_{km}\boldsymbol{e}_i \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{jk}\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

所以

$$w_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{jk}$$

先证明式(2.5.5)，它的右端

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{w} &= -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D}) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{lmn}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n\cdot(\varepsilon_{ijk}D_{jk}\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}D_{jk}\delta_{ni}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk}D_{jk}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk}D_{jk}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{1}{2}\delta_{lmjk}D_{jk}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})D_{jk}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{lj}\delta_{mk}D_{jk}-\delta_{lk}\delta_{mj}D_{jk})\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}(D_{lm}-D_{ml})\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{1}{2}[D_{lm}-(-D_{lm})]\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}(2D_{lm})\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \\
&= D_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m
\end{aligned}$$

显然它等于式(2.5.5) 的左端 $\boldsymbol{D}$，所以

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{w}$$

再证明式(2.5.6)，它的左端由式(2.5.3) 有

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} = D_{ij}u_j\boldsymbol{e}_i$$

它的右端有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u} &= \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D}\right)\times\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{jk}\boldsymbol{e}_i\times u_l\boldsymbol{e}_l \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}D_{jk}u_l\varepsilon_{ilm}\boldsymbol{e}_m = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}D_{jk}u_l\boldsymbol{e}_m \\
&= -\frac{1}{2}\delta_{jklm}D_{jk}u_l\boldsymbol{e}_m = -\frac{1}{2}[(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})D_{jk}u_l]\boldsymbol{e}_m \\
&= -\frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{km}D_{jk}u_l-\delta_{jm}\delta_{kl}D_{jk}u_l)\boldsymbol{e}_m = -\frac{1}{2}(D_{lm}u_l-D_{ml}u_l)\boldsymbol{e}_m \\
&= -\frac{1}{2}[(-D_{ml})u_l-D_{ml}u_l]\boldsymbol{e}_m = -\frac{1}{2}(-2D_{ml}u_l)\boldsymbol{e}_m \\
&= D_{ml}u_l\boldsymbol{e}_m
\end{aligned}$$

显然，式(2.5.6) 的两端相等，即

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$$

特别地，当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$ 时，式(2.5.6) 右端为零，即式(2.5.7) 成立

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

从上面的分析可以知道，对于二阶反对称张量 $\boldsymbol{D}$ 来说，反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 是多么重要，用它就可以给出二阶反对称张量 $\boldsymbol{D}$ 的全部信息。

下面我们再来看看反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 的三个分量。由式(2.5.4b) 有

$$w_1 = -\frac{1}{2}(D_{23} - D_{32}) = -\frac{1}{2}[D_{23} - (-D_{23})] = -D_{23} = D_{32}$$
$$w_2 = -\frac{1}{2}(D_{31} - D_{13}) = -\frac{1}{2}[D_{31} - (-D_{31})] = -D_{31} = D_{13} \qquad (2.5.8)$$
$$w_3 = -\frac{1}{2}(D_{12} - D_{21}) = -\frac{1}{2}[D_{12} - (-D_{12})] = -D_{12} = D_{21}$$

2.5.3 二阶反对称张量的主值、主方向和主不变量

由式(2.5.8) 和式(2.5.1),二阶反对称张量 $\boldsymbol{D}$ 的对应矩阵可以用其反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 的分量来表示,这样 $\boldsymbol{D}$ 的对应矩阵可写成

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.5.9)$$

二阶反对称张量 $\boldsymbol{D}$ 的 3 个主不变量为

$$\mathrm{I}_D = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$$
$$\mathrm{II}_D = \frac{1}{2}(D_{ii}D_{jj} - D_{ij}D_{ji}) = w_iw_i = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{w}|^2$$
$$\mathrm{III}_D = \det\boldsymbol{D} = 0$$

从而 $\boldsymbol{D}$ 的特征方程为

$$\lambda^3 + |\boldsymbol{w}|^2\lambda = 0 \qquad (2.5.10)$$

由式(2.5.10) 可知 $\lambda = 0$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的单重主值。

再由式(2.5.7) 可知,主值 $\lambda = 0$ 所对应的主方向就是 $\boldsymbol{D}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{w}$。

现在,我们取新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$,其标准正交基为 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$,并取 $\boldsymbol{e}'_3$ 为

$$\boldsymbol{e}'_3 = \frac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|} \qquad (2.5.11)$$

另外两个基矢量 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 可以是任意两个与 $\boldsymbol{e}'_3$ 垂直的单位矢量,且有 $\boldsymbol{e}'_1 \perp \boldsymbol{e}'_2$,在这个新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 下,$\boldsymbol{D}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 可设为

$$\boldsymbol{w} = w'_i\boldsymbol{e}'_i = w'_1\boldsymbol{e}'_1 + w'_2\boldsymbol{e}'_2 + w'_3\boldsymbol{e}'_3$$

由式(2.5.11) 知

$$w'_1 = w'_2 = 0$$
$$w'_3 = |\boldsymbol{w}|$$

所以

$$\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}'_3$$

从而根据式(2.5.5) 计算出所有的 D'_{ij},即

$$D'_{12} = -D'_{21} = -w'_3 = -|w|$$
$$D'_{13} = -D'_{31} = w'_2 = 0$$
$$D'_{23} = -D'_{32} = -w'_1 = 0$$
$$D'_{11} = D'_{22} = D'_{33} = 0$$

所以在这一新坐标系下,$\boldsymbol{D}$ 所对应的矩阵为

$$D' = [D'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -|w| & 0 \\ |w| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.12}$$

它在新标架下的并基展开式为

$$D = -|w|e'_1e'_2 + |w|e'_2e'_1 \tag{2.5.13}$$

实际上,由 D 的特征方程式(2.5.10)可知,除了 $\lambda_3 = 0$ 是 D 的主值以外,还有两个主值 λ_1 和 λ_2 为一对共轭复数 $\pm|w|\mathrm{i}$,其对应的主方向也是复数基矢量,在这一组标架下也可以把 D 的对应矩阵写成对角的标准型,即

$$[D] = \begin{bmatrix} |w|\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -|w|\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5.14}$$

而经过适当的方法可以把它化为实数形式的标准型,如式(2.5.12)所示。具体的方法在这里就不细述了,有兴趣的读者可参考黄克智等编著的《张量分析》(清华大学出版社,2003.7,P62 ~ 63)。

例 2.9 试证明二阶张量 T 为反对称的充分必要条件是:对于任意矢量 v,恒有

$$v \cdot T \cdot v = 0$$

解 设矢量 v 在笛卡尔坐标系中的表达式为

$$v = v_ie_i$$

而二阶张量 T 的表达式为

$$T = T_{ij}e_ie_j$$

所以

$$\begin{aligned} v \cdot T \cdot v &= v_ie_i \cdot T_{jk}e_je_k \cdot v_le_l \\ &= v_iT_{jk}\delta_{ij}e_k \cdot v_le_l \\ &= v_iT_{ik}e_k \cdot v_le_l \\ &= v_iT_{ik}v_l\delta_{kl} \\ &= v_iT_{ik}v_k \end{aligned}$$

先证必要条件,即若二阶张量 T 为反对称张量,则

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

所以

$$v \cdot T \cdot v = v_iv_kT_{ik} = 0$$

这是显然的,因为 i,k 皆为哑标,必有

$$\begin{aligned} v_iv_kT_{ik} &= v_1v_2T_{12} + v_2v_1T_{21} + \cdots \\ &= v_1v_2(T_{12} + T_{21}) + \cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

再证充分条件,若 $v \cdot T \cdot v = 0$ 即

$$\begin{aligned} v_iv_kT_{ik} &= v_1v_1T_{11} + v_1v_2T_{12} + v_1v_3T_{13} + v_2v_1T_{21} + v_2v_2T_{22} \\ &\quad + v_2v_3T_{23} + v_3v_1T_{31} + v_3v_2T_{32} + v_3v_3T_{33} \\ &= v_1v_1T_{11} + v_2v_2T_{22} + v_3v_3T_{33} + v_1v_2(T_{12} + T_{21}) \\ &\quad + v_1v_3(T_{13} + T_{31}) + v_2v_3(T_{23} + T_{32}) \end{aligned}$$

$$= 0$$

因为 $\boldsymbol{v}$ 是任意矢量，要保证上式成立，必有

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$$

$$T_{12} = -T_{21}$$

$$T_{13} = -T_{31}$$

$$T_{23} = -T_{32}$$

所以 $\boldsymbol{T}$ 必定是一个反对称张量。

例 2.10 试证明二阶对称张量与二阶反对称张量的内积恒等于零。

证 设二阶对称张量为 $\boldsymbol{A}$，则有

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{a}$$

而二阶反对称张量为 $\boldsymbol{B}$，则有

$$B_{ij} = -B_{ji} \tag{b}$$

二阶对称张量 $\boldsymbol{A}$ 和二阶反对称张量 $\boldsymbol{B}$ 的内积可表示为

$$A_{ij}B_{ij} \tag{c}$$

因为 i,j 都是哑指标，可以更换，所以

$$A_{ij}B_{ij} = A_{ji}B_{ji} \tag{d}$$

考虑到式(a)，式(d) 可写成

$$A_{ij}B_{ij} = A_{ij}B_{ji} \tag{e}$$

再考虑到式(b)，式(e) 可改写成

$$A_{ij}B_{ij} = -A_{ij}B_{ij}$$

移项可得

$$2A_{ij}B_{ij} = 0$$

即

$$A_{ij}B_{ij} = 0 \tag{f}$$

这就证明了二阶对称张量和二阶反对称张量的内积恒等于零。

类似地还可以证明：若三阶张量 $\boldsymbol{C}$ 对第一、第二指标为反对称，即

$$C_{ijk} = -C_{jik} \tag{g}$$

则

$$A_{ij}C_{ijk} = 0 \tag{h}$$

同样，若四阶张量 $\boldsymbol{D}$ 对第一、第二指标为反对称，即

$$D_{ijkl} = -D_{jikl} \tag{i}$$

则

$$A_{ij}D_{ijkl} = 0 \tag{l}$$

2.6 正常正交张量

2.6.1 定义

若一个二阶张量 $\boldsymbol{Q} = Q_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 可逆，并且其逆与该张量的共轭相等，即

$$Q^{-1} = Q_c \tag{2.6.1a}$$

因为

$$Q \cdot Q^{-1} = I$$

所以

$$Q \cdot Q_c = Q_c \cdot Q = I \tag{2.6.1b}$$

则称该二阶张量 Q 为**正交张量**。

由式(2.6.1) 可知,正交张量的对应矩阵应满足

$$Q^{-1} = Q^T \tag{2.6.2a}$$

即

$$QQ^T = Q^TQ = I \tag{2.6.2b}$$

又因为

$$\det Q^T = \det Q$$

所以

$$\det Q \cdot \det Q_c = (\det Q)^2 = 1$$

故而正交张量的行列式的值只有两种情形

$$\det Q = \det Q = +1 \tag{2.6.3a}$$

$$\det Q = \det Q = -1 \tag{2.6.3b}$$

我们把行列式值为 +1 的正交张量称为**正常正交张量**,把行列式值为 -1 的正交张量称为**反常正交张量**(或称**非正常正交张量**)。由于正常正交张量有明显的几何意义,所以我们主要讨论正常正交张量。

2.6.2 正交张量的"保内积"性质

正交张量所对应的线性变换(即与矢量的点积),称为**正交变换**,它具有"**保内积**"性质。

定理 正交张量 Q 对于任意两个矢量 u 和 v,恒有其内积不变,即

$$(Q \cdot u) \cdot (Q \cdot v) = u \cdot v \tag{2.6.4}$$

我们用指标记法证明之。因为

$Q \cdot u$ 的指标记法为 $Q_{ij}u_j$

$Q \cdot v$ 的指标记法为 $Q_{ij}v_j$

所以式(2.6.4) 的左端为

$$\begin{aligned}(Q_{ij}u_je_i) \cdot (Q_{pq}v_qe_p) &= Q_{ij}Q_{pq}u_jv_q\delta_{ip} \\ &= Q_{ij}Q_{iq}u_jv_q \\ &= \delta_{jq}u_jv_q \\ &= u_jv_j\end{aligned}$$

而式(2.6.4) 的右端为

$$u_ie_i \cdot v_je_j = u_iv_j\delta_{ij} = u_jv_j$$

所以

$$(Q \cdot u) \cdot (Q \cdot v) = u \cdot v$$

逆定理 若一个二阶张量 Q 对于任意两个矢量 u, v 进行线性变换后,仍保持该两矢量的内积不变,则此二阶张量 Q 必定是正交张量。

由定理的证明过程,我们可以把等式的左端写成

$$Q_{ij}Q_{iq}u_jv_q$$

而右端可写成

$$\delta_{jq}u_jv_q$$

所以有

$$Q_{ij}Q_{iq}u_jv_q = \delta_{jq}u_jv_q$$

亦即

$$(Q_{ij}Q_{iq} - \delta_{jq})u_jv_q = 0$$

又由于矢量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 的任意性。所以要保证上式成立,一定有

$$Q_{ij}Q_{iq} - \delta_{jq} = 0$$

即

$$Q_{ij}Q_{iq} = \delta_{jq}$$

或者写成矩阵形式

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$$

这就证明了 $\boldsymbol{Q}$ 必为正交张量。

保内积性质说明,任意两个矢量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 经正交变换后的点积(又称内积)与变换前的点积保持不变。

由保内积性质可知,对任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 恒有

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$$

即

$$|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2$$

所以

$$|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}| \tag{2.6.5}$$

上式说明,任何一个矢量 $\boldsymbol{u}$ 经正交变换后的长度(模)保持不变。而且,假如任意两个矢量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 α,而它们经正交变换后的夹角为 β,则由保内积性质

$$|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}||\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}|\cos\beta = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\alpha$$

根据式(2.6.5)有

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\beta = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\alpha$$

所以

$$\alpha = \beta$$

或写成

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{2.6.6}$$

上式说明,任何两个矢量的夹角经正交变换后保持不变。

下面再来看看正常正交张量对基矢量的正交变换。

因为

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_k = Q_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k = Q_{ij}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i = Q_{ik}\boldsymbol{e}_i$$

所以

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= Q_{11}\boldsymbol{e}_1 + Q_{21}\boldsymbol{e}_2 + Q_{31}\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= Q_{12}\boldsymbol{e}_1 + Q_{22}\boldsymbol{e}_2 + Q_{32}\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= Q_{13}\boldsymbol{e}_1 + Q_{23}\boldsymbol{e}_2 + Q_{33}\boldsymbol{e}_3
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

这样，经正交变换后的基矢量的混合积

$$[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3] = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \det\boldsymbol{Q} = 1 \tag{2.6.8}$$

式(2.6.7)意味着 $\boldsymbol{Q}$ 把标准正交基 $\boldsymbol{e}_i$ 变换到标准正交基 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_i$。对于任意矢量

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$$

经正交变换后为

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{2.6.9}$$

综上所述，正常正交变换使空间绕坐标原点作一刚性转动（即空间中任一矢量的长度不变，任意两个矢量之间的夹角不变）。这就是正常正交张量的几何意义。

2.6.3 正常正交张量几何意义的解释

我们讨论正常正交张量是如何完成使空间作刚性转动的。为此先介绍几个引理（以下设 $\boldsymbol{Q}$ 为正常正交张量）。

引理 1 若 $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{I}$，则必有单重主值 $\lambda = 1$。

证明 正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的特征方程

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_Q\lambda^2 + \mathrm{II}_Q\lambda - \mathrm{III}_Q = 0$$

根据主不变量的定义及正常正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的性质易证

$$\mathrm{I}_Q = \mathrm{II}_Q \tag{2.6.10}$$

并且因为 $\mathrm{III}_Q = \det\boldsymbol{Q} = 1$，因此特征方程变成

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_Q\lambda^2 + \mathrm{I}_Q\lambda - 1 = 0$$

化简上式

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1 - \lambda\,\mathrm{I}_Q) = 0$$

显然 $\lambda = 1$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的单重主值。

引理 2 只要适当选取新的坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$，必可将 $\boldsymbol{Q}$ 关于该坐标系的对应矩阵 $\boldsymbol{Q}'$ 化为

$$\boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6.11}$$

其中 $0 \leq \theta < 2\pi$。

证明 当 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ 时，对应矩阵为单位阵，即对应于式(2.6.11)中 $\theta = 0$ 的情形。

当 $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{I}$ 时，由引理 1 可知，$\lambda = 1$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的单重主值，对应于 $\lambda = 1$ 主值的主方向可表示为一个除了标量因子外的单位矢量，并设这个单位矢量为 $\boldsymbol{r}$。现在做新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$，它的标准正交基为 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$，并且令 $\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{r}$。设 $\boldsymbol{Q}$ 关于该新坐标系的对应矩阵为

$$\boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix} \tag{a}$$

由式(2.6.7)有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1' &= Q_{11}'\boldsymbol{e}_1' + Q_{21}'\boldsymbol{e}_2' + Q_{31}'\boldsymbol{e}_3' \\
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2' &= Q_{12}'\boldsymbol{e}_1' + Q_{22}'\boldsymbol{e}_2' + Q_{32}'\boldsymbol{e}_3' \\
\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3' &= Q_{13}'\boldsymbol{e}_1' + Q_{23}'\boldsymbol{e}_2' + Q_{33}'\boldsymbol{e}_3'
\end{aligned}
\tag{b}
$$

由于现在 $\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 对应于 $\lambda = 1$ 的主方向，所以一定有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3' = \lambda\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3'$$

对照式(b) 中的第三个式子，易知

$$Q_{13}' = Q_{23}' = 0,\quad Q_{33}' = 1 \tag{c}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$ 互相正交，又由于正常正交张量的保内积性质，经正交变换后两个矢量的夹角保持不变，这就是说 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3'$ 也应该互相正交，即其点积为零，所以

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2')\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3') = 0 \tag{d}$$

由式(b)，可得

$$Q_{12}'Q_{13}' + Q_{22}'Q_{23}' + Q_{32}'Q_{33}' = 0$$

把式(c) 代入，则得

$$Q_{32}' = 0 \tag{e}$$

同样由于

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1')\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3') = 0 \tag{f}$$

由式(b)，可得

$$Q_{11}'Q_{13}' + Q_{21}'Q_{23}' + Q_{31}'Q_{33}' = 0$$

把式(c) 代入，则得

$$Q_{31}' = 0 \tag{g}$$

现令 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1'$ 关于 x_1' 轴的方向余弦为 $\cos\theta$，而它关于轴 x_2' 的方向余弦为 $\sin\theta$，由式(b) 可知

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{11}' &= \cos\theta \\
Q_{21}' &= \sin\theta
\end{aligned}\right.\quad (0 < \theta < 2\pi)
\tag{h}
$$

又因为 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1'$ 与 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2'$ 正交，如图 2－1 所示，$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2'$ 与 x_1' 轴的方向余弦为 $-\sin\theta$，而它与 x_2' 轴的方向余弦为 $\cos\theta$，对照式(b) 可知

$$
\left.\begin{aligned}
Q_{12}' &= -\sin\theta \\
Q_{22}' &= \cos\theta
\end{aligned}\right.\quad (0 < \theta < 2\pi)
\tag{i}
$$

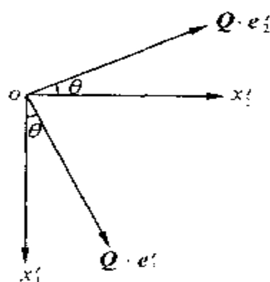


图 2－1　正交变换

代入 $\boldsymbol{Q}$ 关于新坐标系 $ox_1'x_2'x_3'$ 的对应矩阵式(a)，就得到

$$
\boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

引理2说明了：若 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$(对应 $\theta = 0$)，则表示恒等变换，即空间不变动；若 $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{I}$，则由式(b) 第三式 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3'$(或 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$)，意味着当正交变换时，过原点与 $\boldsymbol{r}$ 平行的直线是不动的。再由式(b) 的第一、第二式可以看出，空间绕此直线转过了 θ 角度。

在坐标变换下，主变量是不变化的，故由式(2.6.11) 有

$$\mathrm{I}_Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = Q_{11}' + Q_{22}' + Q_{33}' = 2\cos\theta + 1$$

所以

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{I}_Q - 1}{2} \tag{2.6.12}$$

在这里,顺便证明式(2.6.10)。既然一个正交张量选取适当的坐标系后,其对应矩阵形如式(2.6.11),那么由主不变量的定义式(2.3.8a′)和式(2.3.8b′)可得

$$\mathrm{I}_Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = \cos\theta + \cos\theta + 1 = 2\cos\theta + 1$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_Q &= \begin{vmatrix} Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{21} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{31} \\ Q_{13} & Q_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos\theta \\
&= 2\cos\theta + 1
\end{aligned}$$

所以对于正交张量有

$$\mathrm{I}_Q = \mathrm{II}_Q$$

即式(2.6.10)成立。

下面再来看看正交张量反对称部分的反偶矢量在正交变换中的地位与作用。

我们把正常正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 分解成对称部分与反对称部分之和,即

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_c) = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{D}$$

式中

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}_c) \quad \text{称为 } \boldsymbol{Q} \text{ 的对称部分}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_c) \quad \text{称为 } \boldsymbol{Q} \text{ 的反对称部分}$$

引理 3 对于正常正交张量 $\boldsymbol{Q}$,若 $\boldsymbol{D} \neq 0$,则

$$\boldsymbol{w} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{Q}}{2} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D}}{2} \tag{2.6.13}$$

是 $\boldsymbol{Q}$ 对应于 $\lambda = 1$ 的主方向,并且对任何与 $\boldsymbol{w}$ 正交的非零矢量 $\boldsymbol{u}$,恒有以下混合积

$$[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{w}] > 0 \tag{2.6.14}$$

证明 证明式(2.6.13),先证 $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D}$。

若 $\boldsymbol{N}$ 为对称张量,则 $N_{ij} = N_{ji}$。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{N} &= \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k : N_{pq}\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{e}_q \\
&= \varepsilon_{ijk}N_{pq}\delta_{jp}\delta_{kq}\boldsymbol{e}_i \\
&= \varepsilon_{ijk}N_{jk}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

它是一个矢量,而矢量的三个分量,对于 $\boldsymbol{e}_1$ 项

$$\varepsilon_{123}N_{23} + \varepsilon_{132}N_{32} = N_{23} - N_{32} = 0$$

同理 $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 项皆为零,所以

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{N} = 0$$

而

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D}$$

若 $D \neq 0$，即 $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{Q}_c$，则必有 $\boldsymbol{Q} \neq \boldsymbol{I}$，根据引理2，$\boldsymbol{Q}$ 在适当的新坐标系下对应的矩阵为式(2.6.11)。而式(2.6.13)是不变性记法下的等式，对任何坐标系都应成立，所以我们只需在新坐标系下证明即可。

$$\boldsymbol{w} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{Q}}{2} = -\frac{1}{2}(\epsilon'_{ijk}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j\boldsymbol{e}'_k : Q'_{pq}\boldsymbol{e}'_p\boldsymbol{e}'_q)$$

$$= -\frac{1}{2}(\epsilon'_{ijk}Q'_{pq}\delta_{jp}\delta_{kq}\boldsymbol{e}'_i)$$

$$= -\frac{1}{2}(\epsilon'_{ijk}Q'_{jk}\boldsymbol{e}'_i)$$

由式(2.6.11)有

$$w'_1 = -\frac{1}{2}(\epsilon'_{123}Q'_{23} + \epsilon'_{132}Q'_{32}) = 0$$

$$w'_2 = -\frac{1}{2}(\epsilon'_{231}Q'_{31} + \epsilon'_{213}Q'_{13}) = 0$$

$$w'_3 = -\frac{1}{2}(\epsilon'_{312}Q'_{12} + \epsilon'_{321}Q'_{21}) = -\frac{1}{2}(-\sin\theta - \sin\theta) = \sin\theta$$

所以

$$\boldsymbol{w} = \sin\theta\boldsymbol{e}'_3$$

而由引理2知，$\boldsymbol{e}'_3$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 对应主值 $\lambda = 1$ 的主方向。所以从上式可看出，$\boldsymbol{w}$ 也是 $\boldsymbol{Q}$ 对应于 $\lambda = 1$ 的主方向。即正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 反对称部分的反偶矢量 $\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 对应于主值 $\lambda = 1$ 的主方向。

下面再计算引理3中的混合积。设非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 正交，即

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

故

$$u'_1w'_1 + u'_2w'_2 + u'_3w'_3 = 0$$

又因为

$$w'_1 = w'_2 = 0, \quad w'_3 \neq 0$$

所以

$$u'_3 = 0$$

故

$$\boldsymbol{u} = u'_1\boldsymbol{e}'_1 + u'_2\boldsymbol{e}'_2$$

而由式(2.6.11)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{u} &= Q'_{ij}u'_j\boldsymbol{e}'_i \\ &= (Q'_{11}u'_1 + Q'_{12}u'_2 + Q'_{13}u'_3)\boldsymbol{e}'_1 + (Q'_{21}u'_1 + Q'_{22}u'_2 + Q'_{23}u'_3)\boldsymbol{e}'_2 \\ &\quad + (Q'_{31}u'_1 + Q'_{32}u'_2 + Q'_{33}u'_3)\boldsymbol{e}'_3 \\ &= (u'_1\cos\theta - u'_2\sin\theta)\boldsymbol{e}'_1 + (u'_1\sin\theta + u'_2\cos\theta)\boldsymbol{e}'_2\end{aligned}$$

所以其混合积

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{w}] &= \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & 0 \\ u'_1\cos\theta - u'_2\sin\theta & u'_1\sin\theta + u'_2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} \\ &= u'_1(u'_1\sin\theta + u'_2\cos\theta)\sin\theta - u'_2(u'_1\cos\theta - u'_2\sin\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

$$= [(u_1')^2 + (u_2')^2]\sin^2\theta = |\boldsymbol{u}|^2\sin^2\theta$$

由于 $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$ 时必有 $\sin\theta \neq 0$,所以 $\boldsymbol{w}$ 也是非零矢量,这就证明了式(2.6.14) 成立。

对于式(2.6.12),我们一般取其主值,即

$$\theta = \arccos\frac{\mathrm{I}_Q - 1}{2} \quad (0 < \theta < \pi)$$

综合以上三个引理中分析的结果,我们知道,当 $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$ 时,对应主值 $\lambda = 1$ 的主方向 $\boldsymbol{w}$,与 $\boldsymbol{w}$ 垂直的非零矢量 $\boldsymbol{u}$,在正交变换下变成矢量 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}$,矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}$ 的叉积再与 $\boldsymbol{w}$ 点积必大于零(即式 2.6.14),这就意味着从 $\boldsymbol{w}$ 的正向回头看,空间在正交变换下绕不动的直线(即通过坐标原点而与 $\boldsymbol{w}$ 平行的那根直线)按逆时钟方向转过了 θ 角,且 $0 < \theta < \pi$。

当 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ 时,即 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_c$,这时可能出现两种特殊情形。

1. $\boldsymbol{Q}$ 的相应矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

此时相当于 $\theta = 0, \cos\theta = 1, \sin\theta = 0$,意味着空间不动或恒等变换。

2. $\boldsymbol{Q}$ 的相应矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

此时相当于 $\theta = \pi, \cos\theta = -1, \sin\theta = 0$,意味着空间绕不动的直线转过 π 角。

最后,我们把三个引理归纳为一个定理(注意 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_3' = \dfrac{\boldsymbol{w}}{\sin\theta} = -\dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{Q}}{2\sin\theta} = -\dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D}}{2\sin\theta}$)。

定理　对于正常正交张量 $\boldsymbol{Q}$,若 $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{Q}$ 把空间绕单位矢量

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{Q}}{2\sin\theta} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{D}}{2\sin\theta} \quad (0 < \theta < \pi) \tag{2.6.15}$$

逆时针方向转过 θ 角,且

$$\theta = \arccos\frac{\mathrm{I}_Q - 1}{2} \quad (0 < \theta < \pi) \tag{2.6.16}$$

当 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ 时,有如下两种特殊情形:

1. $\cos\theta = 1, \theta = 0$,此时 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$,表示恒等变换;
2. $\cos\theta = -1, \theta = \pi$,此时 $\boldsymbol{Q}$ 使空间绕 $\boldsymbol{r}$ 转过 π 角。

2.7　二阶张量的分解

2.7.1　二阶张量的加法分解

对于任意一个二阶张量 $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$,可以进行对称化与反对称化运算,即由 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}^T$ 分别构造下式

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_c) \tag{2.7.1a}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}_c) \tag{2.7.2a}$$

其分量表达式为

$$N_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \tag{2.7.1b}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \tag{2.7.2b}$$

由对称二阶张量与反对称二阶张量的性质易知,任意一个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 都可以分解为一个对称二阶张量$\boldsymbol{N}$与一个反对称二阶张量$\boldsymbol{\Omega}$,式(2.7.1)和式(2.7.2)惟一地确定了$\boldsymbol{N}$与$\boldsymbol{\Omega}$,故张量的加法分解是惟一的。

一般的二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 具有 9 个独立的分量,而二阶对称张量具有 6 个独立的分量,二阶反对称张量只有 3 个独立的分量。

通常,对于对称二阶张量 $\boldsymbol{N}$,还可以进一步分解为球形张量 $\boldsymbol{P}$ 与偏斜张量$\boldsymbol{D}$,即

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} \tag{2.7.3}$$

这样

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Omega} \tag{2.7.4}$$

其中,球形张量为

$$\boldsymbol{P} = P_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_T\boldsymbol{G} = \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_T\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.7.5a}$$

球形张量只有一个独立的分量

$$P_{ij} = \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_T\delta_{ij} = \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_N\delta_{ij} = \begin{cases}\frac{1}{3}(N_{11} + N_{22} + N_{33}), & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j\end{cases} \tag{2.7.5b}$$

球形张量的三个主不变量为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_P &= \mathrm{I}_T = \mathrm{I}_N \\ \mathrm{II}_P &= \frac{1}{3}(\mathrm{I}_N)^2 \\ \mathrm{III}_P &= \frac{1}{27}(\mathrm{I}_N)^3\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

显然,球形张量 $\boldsymbol{P}$ 只有一个独立的不变量,且其第一主不变量 I_P 就是对应的对称张量$\boldsymbol{N}$或任意二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的第一主不变量。球形张量的 3 个主分量均相等,空间任一组标准正交基都是球形张量的主方向。

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_N = \frac{1}{3}(N_{11} + N_{22} + N_{33}) \tag{2.7.7}$$

偏斜张量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = (N_{ij} - P_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{2.7.8a}$$

其中

$$D_{ij} = N_{ij} - P_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{3}\,\mathrm{I}_N\delta_{ij} = \begin{cases}N_{ij} - \frac{1}{3}(N_{11} + N_{22} + N_{33}), & \text{当 } i = j \\ N_{ij}, & \text{当 } i \neq j\end{cases} \tag{2.7.8b}$$

偏斜张量的 9 个分量除满足对称条件外,还应满足其第一主不变量为零的条件,故只有 5 个

独立的分量。其3个主不变量为

$$\mathrm{I}_D = 0 \tag{2.7.9a}$$

$$\mathrm{II}_D = \mathrm{II}_N - \frac{1}{3}(\mathrm{I}_N)^2 \tag{2.7.9b}$$

$$\mathrm{III}_D = \mathrm{III}_N - \frac{1}{3}\mathrm{I}_N\mathrm{II}_N + \frac{2}{27}(\mathrm{I}_N)^3 \tag{2.7.9c}$$

显然，偏斜张量 $\boldsymbol{D}$ 只有2个独立的不变量。偏斜张量的特征方程为

$$\lambda^3 + \mathrm{II}_D\lambda - \mathrm{III}_D = 0 \tag{2.7.10}$$

偏斜张量 $\boldsymbol{D}$ 的主方向就是它所对应的对称张量 $\boldsymbol{N}$ 的主方向。

例 2.11 二阶张量的加法分解在连续介质力学中的应用

在小变形的连续介质力学中，加法分解的物理意义十分明显。例如可以把位移梯度分量分解为应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和旋转张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 两部分。其中应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是对称张量，它表示线元的纯变形，而旋转张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 是反对称张量，若其反偶矢量为 $\boldsymbol{w}$，则对于任意矢量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{\Omega}$ 所做的线性变换为

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$$

在小变形情况下，上式表示线元绕 $\boldsymbol{\Omega}$ 的轴方向的刚体转动，转动矢量为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{w}$。因此，在小变形问题中，位移梯度张量通过加法分解为一个反映纯变形的张量和一个反映刚体转动的张量。

例 2.12 已知：$\boldsymbol{A}$ 为二阶张量，$\boldsymbol{Q}$ 为任意正交张量，对于一切 $\boldsymbol{Q}$，若均有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c = \boldsymbol{A}$$

试证明 $\boldsymbol{A}$ 为球形张量。

证明 设二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

第一步，先证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称张量，因为 $\boldsymbol{Q}$ 是任意的正交张量，故取关于 ox_2x_3 平面的镜面反射，其对应矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这样 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c$ 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ -A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c = \boldsymbol{A}$$

所以必有

$$A_{12}=-A_{12}=0$$
$$A_{13}=-A_{13}=0$$
$$A_{21}=-A_{21}=0$$
$$A_{31}=-A_{31}=0$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的对应矩阵变为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&A_{23}\\0&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

若再取 $\boldsymbol{Q}$ 为关于 ox_1x_3 平面的镜面反射,其对应矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

这样 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c$ 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&A_{23}\\0&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&-A_{23}\\0&-A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c=\boldsymbol{A}$$

所以必有

$$A_{23}=-A_{23}=0$$
$$A_{32}=-A_{32}=0$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的对应矩阵变为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&0\\0&0&A_{33}\end{bmatrix}$$

即证得了 $\boldsymbol{A}$ 为对称张量。

第二步,再证明 $\boldsymbol{A}$ 为一球形张量。若取 $\boldsymbol{Q}$ 为绕 x_3 轴顺时针转过 90° 的变换,则 $\boldsymbol{Q}$ 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

这样 $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c$ 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&0\\0&0&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$$

所以

$$A_{11} = A_{22}$$

同理若再取 $\boldsymbol{Q}$ 为绕 x_1 轴顺时针转过 90° 的变换，则 $\boldsymbol{Q}$ 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这样 $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}_c$ 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}_c = \boldsymbol{A}$$

所以

$$A_{22} = A_{33}$$

至此证得了

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为一球形张量。

例 2.13 已知：二阶张量

$$\boldsymbol{T} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

试对它进行加法分解。

解 任意一个二阶张量都可以分解为一个对称张量 $\boldsymbol{N}$ 和一个反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$，由式(2.7.1a)和式(2.7.2a)，用矩阵形式运算，对称张量为

$$[\boldsymbol{N}] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

反对称张量为

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \frac{1}{2}(T - T^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通常对于对称二阶张量 $\boldsymbol{N}$,还可以进一步分解为球形张量 $\boldsymbol{P}$ 和偏斜张量 $\boldsymbol{D}$,即

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}$$

其中球形张量 $\boldsymbol{P}$ 由式(2.7.5b)可表示为

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3}(N_{11} + N_{22} + N_{33}) = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) + 3\right] = \frac{1}{2}, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

所以其矩阵表达式为

$$[\boldsymbol{P}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

而偏斜张量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{P}$$

用矩阵表示为

$$[\boldsymbol{D}] = [\boldsymbol{N}] - [\boldsymbol{P}]$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

所以二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 最后可以分解成

球形张量

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)$$

偏斜张量

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \frac{5}{2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

反对称张量

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$$

2.7.2 二阶张量的乘法分解(极分解)

在连续介质力学中进行大变形的几何分析时,需要对变形梯度张量进行乘法分解(极分解)。

定理 任意的二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 必定可以分解为一个正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 与一个正定对称二阶张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的点积

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{U} \tag{2.7.11a}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q} \tag{2.7.11b}$$

通常把式(2.7.11a)称为**右极分解**,式(2.7.11b)称为**左极分解**。

证明 我们用矩阵表示法来证明,于是式(2.7.11a)和(2.7.11b)分别表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{QU}\\ \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{VQ}\end{aligned} \tag{a}$$

只需证明以上两式成立即可。

把矩阵 $\boldsymbol{T}$ 看作以下线性变换的系数矩阵

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad 或 \quad [x_i']^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}[x_i]^{\mathrm{T}} \tag{b}$$

取式(b)的转置

$$[x_i'] = [x_i]\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{c}$$

由式(b)、(c),则位置矢量的点积是

$$[x_i'][x_i']^{\mathrm{T}} = [x_i]\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}[x_i]^{\mathrm{T}} \tag{d}$$

因为当 $[x_i'] \neq 0$ 时,即不是零矢量时,式(d)恒大于零。又因

$$(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} \tag{e}$$

故而 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$ 是正定的对称矩阵。这样,我们可以定义 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$ 的$\frac{1}{2}$次幂,令

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}} \tag{f}$$

$\boldsymbol{U}$ 也为对称矩阵,即

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{T}_c\cdot\boldsymbol{T}} \tag{2.7.12}$$

我们再定义

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{TU}^{-1} \tag{g}$$

则由式(g)、(f)知

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{TU}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{h}$$

式(h)表明 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵,从而

$$Q = T \cdot U^{-1}$$

就是正交张量。所以

$$Q \cdot U = T \cdot U^{-1} \cdot U = T \cdot I = T$$

这就证明了右极分解是正确的,并且还给出了 U 的计算公式。

下面证明惟一性。假设存在另一种分解法 $T = Q_0 U_0$,其中 Q_0 是正交阵,U_0 是正定对称阵。于是

$$U_0 = Q_0^{-1} T = Q_0^T T \tag{i}$$

$$U_0^T = (Q_0^T T)^T = T^T Q_0 \tag{j}$$

所以

$$U_0^2 = U_0^T U_0 = T^T Q_0 Q_0^T T = T^T T = U^2$$

由于 U_0 也是正定的,故必有

$$U_0 = \sqrt{T^T T} = U \tag{k}$$

又有

$$Q_0 = T U_0^{-1} = T U^{-1} = Q \tag{l}$$

这就证明了右极分解的惟一性。

左极分解可以这样证明。令

$$V = Q U Q^{-1} = Q U Q^T \tag{m}$$

由矩阵理论,V 也是正定对称的。

由式(m)知

$$VQ = QUQ^{-1}Q = QUI = QU = T$$

因此

$$T = VQ \tag{n}$$

从而得证。由式(m)知

$$V^2 = QUQ^{-1}QUQ^{-1} = (QU)(UQ^T) = TT^T$$

这表明

$$V = \sqrt{TT^T} \tag{o}$$

即

$$V = \sqrt{T \cdot T_c} \tag{2.7.13}$$

式(2.7.13)给出了 V 的求法。当然也可在算出了 U 后按式(m)计算出,从而得 V。

至于左极分解惟一性的证明,可以用完全相同的方法给出。

假设有另一种分解法 $T = V_1 Q_1$,其中 Q_1 是正交阵,V_1 为正定对称阵。于是

$$V_1 = T Q_1^{-1} = T Q_1^T$$

$$V_1^T = (T Q_1^T)^T = Q_1 T^T$$

所以

$$V_1^2 = V_1 V_1^T = T Q_1^T Q_1 T^T = TT^T = V^2$$

由于 V_1 也是正定的,所以

$$V_1 = \sqrt{TT^T} = V$$

而

$$Q_1 = V_1^{-1}T = V^{-1}T = Q$$

这就证明了左极分解的惟一性。

2.8 各向同性张量

我们知道，绝大多数张量的分量经过旋转坐标变换(即从一个正交笛卡尔坐标系变到另一个正交笛卡尔坐标系)后将改变其值。例如有一个矢量 $\boldsymbol{u}$，若它在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的分量为$(u_1,0,0)$，现在作这样一个旋转变换：保持 x_3 轴不动，让 x_1，x_2 轴绕 x_3 轴旋转 π 角度。这样新老坐标之间的关系变为 $x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = x_3$。所以矢量 $\boldsymbol{u}$ 在新坐标系中的分量变为$(-u_1,0,0)$。显然，只要 $\boldsymbol{u}$ 不是零矢量，在新老坐标系中的分量值不等。我们称这类张量为**各向异性张量**。但也有另一类张量，其每一分量经旋转坐标变换后不改变其分量值。这类张量我们称之为**各向同性张量**。例如标量、单位张量 δ_{ij}、置换张量 ε_{ijk} 等都是各向同性张量。

各向同性的名词来源于物理，物理中的某些量常常用张量来表征。例如弹性系数张量 c_{ijkl} 是一个四阶张量，它的第一个分量 c_{1111} 表示 x_1 轴方向的轴向拉伸弹性系数。当原坐标系旋转到新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 时，如果 $c'_{1111} = c_{1111}$，即 x'_1 轴方向上的拉伸弹性系数都维持 x_1 轴方向上的值不变，那么这样的弹性体对拉伸来说就是各向同性的了。各向同性张量的名词就是借用上述的物理概念。

2.8.1 定义

若 n 阶笛卡尔张量

$$\boldsymbol{H} = H_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k$$

的每个分量都是任意旋转坐标变换下的不变量，即

$$H'_{ij\cdots k} = H_{ij\cdots k} \tag{2.8.1}$$

则称这个张量 $\boldsymbol{H}$ 为**各向同性张量**，其中 $H'_{ij\cdots k}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 在任意新坐标系下的分量。

根据定义可知，标量都是各向同性的，矢量除零矢量外都是各向异性的。本节主要讨论关于二阶、三阶和四阶各向同性张量的形式。

首先讨论对各向同性张量都适用的一个重要定理。

2.8.2 置换定理

设 $ox_1x_2x_3$ 为老坐标系，若要求经旋转变换后的新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 同老坐标系完全重合，则只有如下两种可能：

1. $x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_1$；
2. $x'_1 = x_3, x'_2 = x_1, x'_3 = x_2$。

对于各向同性张量，如二阶张量 H_{ij} 是各向同性的，它的一个分量 H_{12} 应满足 $H'_{12} = H_{12}$，但是新坐标系中的 H'_{12} 相当于老坐标系中的 H_{23}(情形 1) 或 H_{31}(情形 2)，因此

$$H_{12} = H_{23} = H_{31} \tag{2.8.2a}$$

同样可以推理得到

$$H_{21} = H_{32} = H_{13} \tag{2.8.2b}$$

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} \tag{2.8.2c}$$

类似地,对于三阶各向同性张量 H_{ijk} 来说,应有

$$H_{111} = H_{222} = H_{333} \tag{2.8.3a}$$

$$H_{112} = H_{223} = H_{331}, \quad H_{113} = H_{221} = H_{332} \tag{2.8.3b}$$

$$H_{121} = H_{232} = H_{313}, \quad H_{131} = H_{212} = H_{323} \tag{2.8.3c}$$

$$H_{122} = H_{233} = H_{311}, \quad H_{133} = H_{211} = H_{322} \tag{2.8.3d}$$

$$H_{123} = H_{231} = H_{312} \tag{2.8.3e}$$

$$H_{132} = H_{213} = H_{321} \tag{2.8.3f}$$

根据以上对二阶、三阶各向同性张量按情形 1、2 的讨论,我们不难得出以下的规律。

设 $H_{ij\cdots k}$ 是 n 阶张量的每一分量,将此分量的每一个下标值作相同的循环置换:

$$1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1$$

则得 $\boldsymbol{H}$ 的另一个分量。如果 $\boldsymbol{H}$ 是各向同性张量,则此两个分量相等。这个规律通常叫做**置换定理**。

下面就二阶、三阶和四阶各向同性张量的形式引出 3 个定理。

2.8.3 二阶各向同性张量的形式

定理 二阶各向同性张量 H_{ij} 的形式必为 $\lambda\delta_{ij}$,其中 λ 为一标量,即

$$H_{ij} = \lambda\delta_{ij} \tag{2.8.4}$$

证明 根据置换定理,由式(2.8.2c),令

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = \frac{1}{3} \mathrm{I}_H = \lambda \tag{a}$$

显然 λ 是个标量。实际上式(a) 证明了式(2.8.4) 中 $i = j$ 的情形。

下面证明当 $i \neq j$ 时 $H_{ij} = 0$。为此,我们作这样的坐标旋转变换:将老坐标系绕 x_3 轴旋转 π 而得到新坐标系,于是

$$x'_1 = -x_1,\ x'_2 = -x_2,\ x'_3 = x_3 \tag{b}$$

对应的变换系数矩阵是

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{c}$$

因为 H_{ij} 是各向同性的,于是

$$H_{23} = H'_{23} = a_{2p}a_{3q}H_{pq} = a_{22}a_{33}H_{23} = -H_{23}$$

由此得到

$$H_{23} = 0 \tag{d}$$

同样地

$$H_{32} = H'_{32} = a_{3p}a_{2q}H_{pq} = a_{33}a_{22}H_{32} = -H_{32}$$

由此得到

$$H_{32} = 0 \tag{e}$$

由式(2.8.2a) 和式(2.8.2b) 可得

$$H_{12} = H_{23} = H_{31} = 0$$
$$H_{21} = H_{32} = H_{13} = 0 \tag{f}$$

即证得了当 $i \neq j$ 时 $H_{ij} = 0$,因而得到

$$H_{ij} = \lambda\delta_{ij}$$

2.8.4 三阶各向同性张量的形式

定理 三阶各向同性张量 H_{ijk} 的形式为$\lambda\epsilon_{ijk}$,其中 λ 为标量,即

$$H_{ijk} = \lambda\epsilon_{ijk} \tag{2.8.5}$$

证明 要证明式(2.8.5)成立,实际上是要证明以下各式

$$H_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i = j = k \text{ 时} & (2.8.5a) \\ 0, & \text{当 } i,j,k \text{ 中有两个相等时} & (2.8.5b) \\ \lambda, & \text{当 } i,j,k \text{ 为偶排列时} & (2.8.5c) \\ -\lambda, & \text{当 } i,j,k \text{ 为奇排列时} & (2.8.5d) \end{cases}$$

成立。

仍取坐标变换如式(c),即

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由张量分量的变换公式,有

$$H_{111} = H'_{111} = a_{1p}a_{1q}a_{1r}H_{pqr} = a_{11}a_{11}a_{11}H_{111} = -H_{111}$$

所以

$$H_{111} = 0$$

由置换定理可得

$$H_{111} = H_{222} = H_{333} = 0 \tag{g}$$

即证得了式(2.8.5a)。

在上述坐标变换下,当 i,j,k 中有两个是3,一个不是3时,有

$$H_{ijk} = H'_{ijk} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}H_{pqr} = (1)^2(-1)H_{pqr} = -H_{ijk}$$

例如

$$H_{331} = H'_{331} = a_{3p}a_{3q}a_{1r}H_{pqr} = a_{33}a_{33}a_{11}H_{331}$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot (-1)H_{331} = -H_{331}$$

所以

$$H_{ijk} = 0 \quad (\text{当 } i,j,k \text{ 中有两个是 3 时}) \tag{h}$$

再根据置换定理式(2.8.3b)、(2.8.3c)和式(2.8.3d)中所有18个分量均等于零,这也就证明了式(2.8.5b)。

而式(2.8.5c)和式(2.8.5d)的证明,如果仍采用上面如式(c)的坐标变换,那么只能得到恒等变换,所以还需采用新的坐标变换。

如将老坐标系绕 x_3 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$ 而得到新坐标系,此时

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = -x_1,\ x'_3 = x_3$$

它的变换系数矩阵是

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{i}$$

那么由张量分量的变换公式有

$$\begin{aligned} H_{123} &= H'_{123} = a_{1p}a_{2q}a_{3r}H_{pqr} = a_{12}a_{21}a_{33}H_{213} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 H_{213} = -H_{213} \end{aligned}$$

由式(2.8.3c) 和式(2.8.3f) 知

$$\begin{aligned} H_{123} = H_{231} = H_{312} = \lambda \\ H_{132} = H_{213} = H_{321} = -\lambda \end{aligned} \tag{j}$$

还需证明由式(j) 规定的 λ 是个标量,因为对任何旋转变换恒有

$$\det A = 1$$

所以

$$H'_{123} = a_{1p}a_{2q}a_{3r}H_{pqr} = \det A H_{pqr} = H_{pqr} = H_{123} = \lambda \tag{k}$$

因此 λ 的确是个标量,从而式(2.8.5c) 和式(2.8.5d) 得证。也就是说,至此我们证明了式(2.8.5) 的全部四种情况。

2.8.5 四阶各向同性张量的形式

定理 四阶各向同性张量 H_{ijkl} 的形式必为

$$H_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk} \tag{2.8.6}$$

其中 α,β,γ 为标量。

证明 要证明式(2.8.6),即要证明下列几种情形

$$H_{ijkl} = \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma, & \text{当 } i = j = k = l & (2.8.6a) \\ \alpha, & \text{当 } i = j \neq k = l & (2.8.6b) \\ \beta, & \text{当 } i = k \neq j = l & (2.8.6c) \\ \gamma, & \text{当 } i = l \neq j = k & (2.8.6d) \\ 0, & \text{其他情形} & (2.8.6e) \end{cases}$$

因为 H_{ijkl} 是各向同性张量,故在坐标变换下有

$$H_{ijkl} = H'_{ijkl} = a_{ip}a_{jq}a_{kr}a_{ls}H_{pqrs} \tag{2.8.7}$$

还是将老坐标系绕 x_3 轴旋转 π,其变换系数矩阵仍为式(c)

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是,当 H_{ijkl} 的四个下标中出现单数个 3 时,这里就有两种情形:四个下标中出现了一个 3,则其余的三个下标为 1 或 2;四个下标中出现三个 3,则余下一个为 1 或 2。此时根据式(2.8.7)

$$H_{ijkl} = H'_{ijkl} = \begin{Bmatrix} 1 \cdot (-1)^3 \\ 1^3 \cdot (-1) \end{Bmatrix} H_{ijkl} = -H_{ijkl}$$

得

$$H_{ijkl} = 0$$

再根据置换定理可知，只要 3(或 1,2) 在下标 i,j,k,l 中出现单数次，就有

$$H_{ijkl} = 0$$

成立，这就证明了式(2.8.6e)。

下面再证明四个下标中有两个相同的情况。为此，我们还要作另一个变换，即将老坐标系绕 x_3 轴旋转 $\frac{\pi}{2}$，其变换系数矩阵仍为式(i)

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再根据式(2.8.7)，有

$$H_{1122} = H'_{1122} = a_{12}a_{12}a_{21}a_{21}H_{2211} = H_{2211}$$

同理则有

$$H_{1212} = H_{2121}$$

$$H_{1221} = H_{2112}$$

再根据置换定理

$$H_{1122} = H_{2233} = H_{3311} = H_{2211} = H_{3322} = H_{1133} = \alpha$$

$$H_{1212} = H_{2323} = H_{3131} = H_{2121} = H_{3232} = H_{1313} = \beta$$

$$H_{1221} = H_{2332} = H_{3113} = H_{2112} = H_{3223} = H_{1331} = \gamma$$

由此可知式(2.8.6b)、(2.8.6c) 和式(2.8.6d) 得证。

现在还剩第一种情况，即四个下标都相同的情形。为此还要作一个新的坐标变换，将老坐标系绕 x_3 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 而得到一个新坐标系，其变换系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

根据式(2.8.7)，有

$$H_{1111} = H'_{1111} = a_{1p}a_{1q}a_{1r}a_{1s}H_{pqrs}$$

在上式的 p,q,r,s 四个下标中，不取 3(因为 $a_{13} = 0$)，只取 1 或 2，而且取 1,2 时只取偶数次(因为取单数次时 $H_{ijkl} = 0$，即式(2.8.6e))。

这样就有

$$\begin{aligned} H_{1111} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 (H_{1111} + H_{2222} + H_{1122} + H_{2211} + H_{1212} + H_{2121} + H_{1221} + H_{2112}) \\ &= \frac{1}{4}(2H_{1111} + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma) \\ &= \frac{1}{2}(H_{1111} + \alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

即

$$2H_{1111} = H_{1111} + \alpha + \beta + \gamma$$

所以

$$H_{1111} = \alpha + \beta + \gamma$$

由置换定理,即得

$$H_{1111} = H_{2222} = H_{3333} = \alpha + \beta + \gamma \tag{m}$$

即式(2.8.6a)得证。

对于任意的旋转变换,不难证明 α,β,γ 是3个独立的标量。

推论 对于第一、第二两个指标为对称的四阶各向同性张量,只有两个独立的标量;并且必对第三、第四两个指标也对称。

证明 设四阶各向同性张量为式(2.8.6)所示

$$H_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

令

$$\begin{aligned} \beta &= \mu + \lambda \\ \gamma &= \mu - \lambda \end{aligned} \tag{n}$$

并代入上式则得

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + (\mu + \lambda)\delta_{ik}\delta_{jl} + (\mu - \lambda)\delta_{il}\delta_{jk} \\ &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \tag{o}$$

因为 H_{ijkl} 对 i,j 对称,故

$$H_{ijkl} = H_{jikl} = \frac{1}{2}(H_{ijkl} + H_{jikl}) \tag{p}$$

将式(o)中的 i,j 对换,得

$$H_{jikl} = \alpha\delta_{ji}\delta_{kl} + \mu(\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}) + \lambda(\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik}) \tag{q}$$

将式(o)和式(q)代入式(p),且因 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$,最后得

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \frac{1}{2}[\alpha(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ji}\delta_{kl}) + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik}) \\ &\quad + \lambda(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ik})] \\ &= \frac{1}{2}[2\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] \\ &= \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

上式中,就只有两个独立的标量 α 和 μ 了。

由式(2.8.8),把 H_{ijkl} 的后两个指标对换得

$$H_{ijlk} = \alpha\delta_{ij}\delta_{lk} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})$$

因为 $\delta_{lk} = \delta_{kl}$,所以显然有

$$H_{ijkl} = H_{ijlk} \tag{2.8.9}$$

说明对第一、第二两个指标为对称的四阶各向同性张量必对第三、第四两个指标也对称。

习 题 二

2.1 若新坐标系 x_i' 是绕 x_3 轴逆时针方向转过 θ 角而得到的,

(a) 求变换系数 a_{ij}；

(b) 求矢量 $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i$ 在新坐标系下的分量；

(c) 求二阶张量 $\boldsymbol{D} = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + 5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ 在新坐标系中的并基展开式。

2.2　给定任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 和任一单位矢量 $\boldsymbol{e}$，总可以把矢量 $\boldsymbol{v}$ 分解成一个平行于 $\boldsymbol{e}$ 的分矢量和一个垂直于 $\boldsymbol{e}$ 的分矢量，证明其表达式为

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e})$$

2.3　在笛卡尔坐标系中计算下列各量的值：

(a) δ_{ii}；　(b) $\delta_{ij}\delta_{ij}\delta_{ji}$；　(c) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$；　(d) $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$；　(e) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kji}$。

2.4　试证明：

$$\epsilon_{ijk}a_ja_k\boldsymbol{e}_i = 0$$

2.5　利用 $\det\boldsymbol{A} = \epsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$ 证明：

$$\det(\boldsymbol{AB}) = (\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{B})$$

2.6　对于矢量 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3$ 和二阶张量 $\boldsymbol{D} = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 - 4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2$，用矩阵表示法计算：

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}$；

(b) $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{b}$；

(c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{b}$。

2.7　已知 $\boldsymbol{D} = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + 5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + 6\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$，计算：

(a) $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}$ 的并基展开式；

(b) $\boldsymbol{D}:\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{F}$ 的值。

2.8　已知有任意二阶张量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，求证：

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_c = \boldsymbol{B}_c\cdot\boldsymbol{A}_c$$

2.9　已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为可逆的二阶张量，求证：

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$$

2.10　已知 $\boldsymbol{T}$ 为可逆的二阶张量，若有矢量 $\boldsymbol{v}$ 使得

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

则必有

$$\boldsymbol{v} = 0$$

2.11　已知 $\boldsymbol{T}$ 为可逆的二阶张量，求证：

$$(\boldsymbol{T}_c)^{-1} = (\boldsymbol{T}^{-1})_c$$

2.12　证明：对于任意二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ 具有相同的主不变量。

2.13　已知矢量 $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b} = b_i\boldsymbol{e}_i$，计算并矢 $\boldsymbol{ab}$ 的三个主不变量。

2.14　设二阶对称张量 $\boldsymbol{T}$ 的对应矩阵为

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

求它的主值和主方向。

2.15　设二阶对称张量 $\boldsymbol{T}$ 的对应矩阵为

$$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

试求$(\boldsymbol{T})^2$的主值和主方向。

2.16　若A_{ij}是对称的，B_{ij}是反对称的，证明：

$$A_{ij}B_{ij}=0$$

2.17　设b_i是矢量的分量，证明二阶张量$B_{ij}=\varepsilon_{ijk}b_k$是反对称的。

2.18　若将并矢$\boldsymbol{ab}$分解成对称部分与反对称部分之和，证明其反对称部分的反偶矢量为

$$\boldsymbol{w}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

2.19　已知$\boldsymbol{Q}$为正交张量，$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$是矢量，求证：

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v})=(\det\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

2.20　已知二阶张量

$$\boldsymbol{F}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

把它进行乘法分解，求出$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{U}$及$\boldsymbol{V}$。

2.21　已知$\boldsymbol{A}$为二阶张量，若对任意正交张量$\boldsymbol{Q}$均有

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}_c=\boldsymbol{A}$$

证明$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}$，其中$\lambda$为一常数。

3 张量场论

3.1 引　　言

我们在讨论矢量分析时，曾研究过场论。其主要内容是讨论标量场的梯度，矢量场的散度和旋度，梯度场的散度（即拉普拉斯算子）以及有关的积分定理等。

这一章我们将要把上述概念推广到张量场中去，即研究任意曲线坐标系中张量及其分量随空间点变化的规律。这样，矢量分析中场论的概念就成了张量场论的特殊情形了。

我们将从以下两个方面推广场论中的一些概念。

1.场论中的一些算子，过去常常是在正交笛卡尔坐标系中讨论的。本章将把它推广到任意曲线坐标系中，使得这些算子适用于任何坐标系。

2.所讨论的场不仅包含标量场和矢量场，而且也适用于任意阶张量场。

我们设 x^i 为任意曲线坐标系（当然也包括正交的笛卡尔坐标系），按第一章式(1.4.4)定义局部协变基矢量为 $\boldsymbol{g}_i$，即

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$$

并按式(1.4.6)定义局部逆变基矢量为 $\boldsymbol{g}^i$，即

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta^i_j$$

我们再设 $x^{i'}$ 为新坐标系，在新坐标系 $x^{i'}$ 下的局部协变基矢量和逆变基矢量分别记做 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$，新老坐标系下的基矢量变换公式由式(1.5.2)和式(1.5.3)给出，即

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta^i_{i'} \boldsymbol{g}_i$$

$$\boldsymbol{g}^{i'} = \beta^{i'}_i \boldsymbol{g}^i$$

其中的协变系数 $\beta^i_{i'}$ 和逆变系数 $\beta^{i'}_i$ 之间的关系以及它们的求法都在第一章中详细介绍过，这里不再过多重复。

仿照标量场和矢量场的定义，我们也可以这样定义张量场。

定义　若空间某区域内每一个点 $P(x^1,x^2,x^3)$ 都指定了一个 n 阶张量

$$\boldsymbol{T}(x^1,x^2,x^3) = T^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l \tag{3.1.1}$$

则称在该区域内给定了一个 n 阶张量场。

显然，张量场的概念是标量场和矢量场的直接推广。实际上，零阶张量场就是标量场，一阶张量场就是矢量场。

在式(3.1.1)中，$\boldsymbol{T}(x^1,x^2,x^3)$ 是随区域内各点的坐标 x^1,x^2,x^3 而变化的，因此它也是点 $P(x^1,x^2,x^3)$ 的函数，有时也写作 $\boldsymbol{T}(P)$。

由于我们采用的是曲线坐标系，所以协变基矢量和逆变基矢量都是随点变化的局部基矢量。对于场函数定义域每一点处定义的张量，其分量应在该点的局部基矢量上就地分解。从而，即使是常张量，在不同点对当地的基矢量分解，也将得到不同的分量。因此，张量的分

量、并基展开式中的协变基矢量和逆变基矢量，都是空间点 P 的函数，也就是坐标 x^1,x^2,x^3 的函数。

这里还要指出，在实际的问题中，张量场中被考察的张量不仅是位置的函数，往往还是时间的函数。我们把随时间变化的张量场叫做非定常的，而把与时间无关的张量场叫做定常的。本章只研究定常的张量场。

3.2 基矢量的导数 · Christoffel 符号

考察空间任意点 $P(x^1,x^2,x^3)$ 及其邻域内的一点 $Q(x^1+\mathrm{d}x^1,x^2+\mathrm{d}x^2,x^3+\mathrm{d}x^3)$，它们的径矢分别为 $\boldsymbol{r}(x^i)$ 和 $\boldsymbol{r}(x^i+\mathrm{d}x^i)$，则径矢的微分(即 $\boldsymbol{r}(x^i+\mathrm{d}x^i)-\boldsymbol{r}(x^i)$ 的线性部分)由第一章式(1.4.5)给出，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}x^i\boldsymbol{g}_i$$

它是个矢量，$\mathrm{d}x^i$ 就是这个矢量在点 $P(x^i)$ 处局部基上的分量。从坐标变换的角度看，因为

$$\mathrm{d}x^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\beta_i^{i'}\mathrm{d}x^i$$

所以可以看出 $\mathrm{d}x^i$ 是一阶张量的逆变分量。

3.2.1 协变基矢量的导数 · Christoffel 符号

现在考虑点 $P(x^i)$ 处协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 关于坐标的偏导数$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}$，按偏导数的定义可知，它也是一个矢量，故而可令

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k \tag{3.2.1}$$

其中 Γ_{ijk} 和Γ_{ij}^k 分别称为**第一类 Christoffel 符号**和**第二类 Christoffel 符号**，或者简称为**第一类 Γ 氏符号**和**第二类 Γ 氏符号**。显然，由式(3.2.1)可知两类克氏符号各有 27 个分量。

由于协变基矢量本身是矢径对于坐标的导数，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^j\partial x^i}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial x^i\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^i}$$

故

$$\begin{aligned}\Gamma_{ijk}&=\Gamma_{jik}\\ \Gamma_{ij}^k&=\Gamma_{ji}^k\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

说明克氏符号对于头两个指标 i 和j 是对称的，所以克氏符号的 27 个分量中，独立的共有 18 个。

容易证明，克氏符号不是张量的分量。这是因为，若在某一个坐标系中，一个张量的所有分量均为零，则在任意坐标系中该张量的分量也均应为零。而克氏符号却不具有这样的特性。在直线坐标系中，由于协变基矢量不随点的位置而改变，故有

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{ij}^k=0$$

而在曲线坐标系中，有

$$\Gamma_{ijk} \neq 0 \quad \Gamma_{ij}^{k} \neq 0$$

为了简便起见，我们常用 ∂_j 或在下标加“$_{,j}$”代替偏导数算符 $\frac{\partial}{\partial x^j}$。如

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j} = \partial_j \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_{i,j} \tag{3.2.3}$$

将式(3.2.1) 点乘 $\boldsymbol{g}_k$ 或 $\boldsymbol{g}^k$，得

$$\boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l \cdot \boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijl}\delta_k^l = \Gamma_{ijk} \tag{3.2.4a}$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma_{ij}^l\delta_l^k = \Gamma_{ij}^k \tag{3.2.4b}$$

因此除了用式(3.2.1) 定义克氏符号外，也可以用式(3.2.4) 来定义克氏符号。

3.2.2 Christoffel 符号与度量张量

由式(3.2.4) 和式(3.2.1) 还可以得到

$$\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l \cdot \boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ij}^l g_{lk} \tag{3.2.5a}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma_{ijl}g^{lk} \tag{3.2.5b}$$

从式(3.2.5) 可以看出，克氏符号的“第三个指标”可以像张量的分量指标那样上升和下降，即用度量张量的逆变分量进行升标，用度量张量的协变分量进行降标。但需特别注意，对于克氏符号的头两个指标 i 和 j 是不能用度量张量进行升降的，因为克氏符号不是一个三阶张量。

另外，第一类克氏符号 Γ_{ijk} 还可以用度量张量的协变分量 g_{ij} 对坐标的偏导数表示，因为

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$$

它对坐标 x^k 的偏导数

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j)}{\partial x^k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^k} \cdot \boldsymbol{g}_j + \boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial x^k}$$
$$= \boldsymbol{g}_{i,k} \cdot \boldsymbol{g}_j + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_{j,k}$$

由式(3.2.4a) 得

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \tag{3.2.6}$$

同理，由指标轮换可得

$$g_{ik,j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}$$
$$g_{jk,i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}$$

再根据式(3.2.2)，上面两式可以改写成

$$g_{ik,j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}$$
$$g_{jk,i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}$$

把上面两式相加后再减去式(3.2.6)，便得

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \tag{3.2.7a}$$

根据克氏符号“第三个指标”的升降标，即利用式(3.2.5b)，得

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{lk}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}) \tag{3.2.7b}$$

因此，当已知坐标系 x^i 下的度量张量的两类分量时，就可以按式(3.2.7) 计算得该坐标系下

的克氏符号。

3.2.3 坐标转换时 Christoffel 符号的转换公式

下面我们来考察当坐标系 x^i 转换为新坐标系 $x^{i'}$ 时，第二类克氏符号的转换关系。设在新坐标系 $x^{i'}$ 下的第二类克氏符号为 $\Gamma_{i'j'}^{k'}$，根据式(3.2.5b) 及协变基矢量在新老坐标系中的变换公式可得

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i'j'}^{k'} &= \boldsymbol{g}_{i',j'} \cdot \boldsymbol{g}^{k'} = (\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i)_{,j'} \cdot \boldsymbol{g}^{k'} \\
&= (\beta_{i',j'}^{i}\boldsymbol{g}_i + \beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_{i,j'}) \cdot \boldsymbol{g}^{k'} \\
&= \left(\beta_{i',j'}^{i}\boldsymbol{g}_i + \beta_{i'}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}\right) \cdot \beta_k^{k'}\boldsymbol{g}^k \\
&= (\beta_{i',j'}^{i}\boldsymbol{g}_i + \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{l}\Gamma_{il}^{j}\boldsymbol{g}_j) \cdot \beta_k^{k'}\boldsymbol{g}^k \\
&= (\beta_{i',j'}^{i}\beta_k^{k'}\delta_i^k + \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{l}\beta_k^{k'}\delta_j^k\Gamma_{il}^{j}) \\
&= \beta_{i',j'}^{i}\beta_i^{k'} + \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{l}\beta_k^{k'}\Gamma_{il}^{k}
\end{aligned}
$$

把哑标 l 换成 j 就可得

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \beta_{i',j'}^{i}\beta_i^{k'} + \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\beta_k^{k'}\Gamma_{ij}^{k} \tag{3.2.8a}$$

由第一章的式(1.5.8) 和式(1.5.9) 知

$$\beta_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad \beta_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

所以式(3.2.8a) 也可写成

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^{k} \tag{3.2.8b}$$

显然，无论是式(3.2.8a) 还是式(3.2.8b) 都不是张量分量的变换规律，这应该是意料之中的事，因为我们在前面已说过，克氏符号不是张量分量。

与式(3.2.8a) 相类似地还有

$$\Gamma_{ij}^{k} = \beta_{i,j}^{k'}\beta_{k'}^{k} + \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_{k'}^{k}\Gamma_{i'j'}^{k'} \tag{3.2.9}$$

再利用式(3.2.5a) 把“第三指标”下降，就可以得到第一类克氏符号在坐标变换中的变换公式

$$\Gamma_{i'j'k'} = g_{mn}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma_{ijk} \tag{3.2.10}$$

3.2.4 逆变基矢量的导数

逆变基矢量是根据对偶条件由协变基矢量派生来的，即

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_l = \delta_l^i$$

将上式对坐标 x^j 求偏导数得

$$\boldsymbol{g}^i_{,j} \cdot \boldsymbol{g}_l + \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_{l,j} = 0$$

由式(3.2.5b) 得

$$\boldsymbol{g}^i_{,j} \cdot \boldsymbol{g}_l = -\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_{l,j} = -\Gamma_{jl}^{i}$$

所以可以求得

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j} = \partial_j \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^i_{,j} = -\Gamma_{jk}^{i}\boldsymbol{g}^k \tag{3.2.11}$$

3.2.5 $\sqrt{g}$ 对坐标的导数 · Γ_{ij}^k 的计算公式

以三个协变基矢量为棱边构成的平行六面体的体积是

$$\sqrt{g} = [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$$

它对于坐标的导数是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} &= \frac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x^i} \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x^i} \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial x^i} \times \boldsymbol{g}_3 \right) + \left(\boldsymbol{g}_2 \times \frac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial x^i} \right) \right] \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x^i} \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial x^i} \times \boldsymbol{g}_3 \right) + \boldsymbol{g}_1 \cdot \left(\boldsymbol{g}_2 \times \frac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial x^i} \right) \\
&= \Gamma_{1i}^k \boldsymbol{g}_k \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot (\Gamma_{2i}^k \boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \Gamma_{3i}^k \boldsymbol{g}_k) \\
&= \Gamma_{1i}^1 \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot (\Gamma_{2i}^2 \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \Gamma_{3i}^3 \boldsymbol{g}_3) \\
&= \Gamma_{1i}^1 \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \Gamma_{2i}^2 \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) + \Gamma_{3i}^3 \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3) \\
&= (\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3)[\boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)] \\
&= \Gamma_{ji}^j \sqrt{g}
\end{aligned}$$

所以

$$\Gamma_{ji}^j = \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{\partial (\ln \sqrt{g})}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\ln g)}{\partial x^i} \tag{3.2.12}$$

3.3 张量的梯度 · 协变导数

3.3.1 标量场的梯度

梯度的概念是场论中对标量场引进的，它反映了标量场随空间点变化的规律。设有正交笛卡尔坐标系 $oxyz$，沿坐标轴正向的单位矢量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$。若在空间每一点 $P(x, y, z)$ 都定义了一个数

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

则在空间(或者在某个区域内)有一个标量场。假定 $\phi(x, y, z)$ 对坐标变量的偏导数存在且连续，可定义矢量

$$\mathbf{grad}\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

把 **grad** ϕ 称为标量场 ϕ 的梯度。

下面我们把标量场的梯度 **grad** ϕ 从笛卡尔坐标系推广到任意曲线坐标系中去，为此，先把 **grad** ϕ 的定义作如下改造。考察 ϕ 的全微分

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

从空间任意一点出发的线元，即该点位置矢量(矢径)的微分为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

所以，ϕ 的全微分可以改写成

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathbf{grad}\ \phi \tag{3.3.1}$$

现在改用曲线坐标系 x^i，并设此坐标系下的局部协变基矢量和局部逆变基矢量分别为 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$，则上述标量场在 x^i 下的函数表达式为

$$\phi = \phi(x^1, x^2, x^3)$$

显然 $\phi(x, y, z)$ 和 $\phi(x^1, x^2, x^3)$ 一般是两个不同的三元函数，但在空间同一点处，其函数值（标量）是不变的。在曲线坐标系下考虑 ϕ 的全微分

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3$$

又因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3$$

根据局部协变基矢量的定义，上式写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^1\boldsymbol{g}_1 + \mathrm{d}x^2\boldsymbol{g}_2 + \mathrm{d}x^3\boldsymbol{g}_3$$

这样

$$\mathrm{d}\phi = (\mathrm{d}x^1\boldsymbol{g}_1 + \mathrm{d}x^2\boldsymbol{g}_2 + \mathrm{d}x^3\boldsymbol{g}_3) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\boldsymbol{g}^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\boldsymbol{g}^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\boldsymbol{g}^3\right)$$

即

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{g}^i\partial_i\phi) \tag{3.3.2}$$

对于由所讨论的点出发的同一线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 来讲，$\mathrm{d}\phi$ 是相同的。故比较式(3.3.1) 和式(3.3.2) 就得到

$$\mathbf{grad}\ \phi = \boldsymbol{g}^i\partial_i\phi = \boldsymbol{g}^1\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \boldsymbol{g}^2\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \boldsymbol{g}^3\frac{\partial \phi}{\partial x^3} \tag{3.3.3}$$

式(3.3.3) 就是标量场的梯度的不变性记法。

3.3.2 张量场的梯度

我们把梯度的概念从标量场推广到任意阶张量场。设在空间(或在空间的某一区域内)定义了一个张量场 $\boldsymbol{\Phi}$，在曲线坐标系 x^i 下，它的并基展开式为(不失一般性，这里以四阶张量场为例)

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^{ij}{}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

并且假定所有分量 $\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot kl}$ 关于坐标的偏导数存在且连续。我们也推广标量函数的全微分概念，称与 $\boldsymbol{\Phi}$ 同型的下述张量为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的绝对微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \partial_i\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}x^i \tag{3.3.4}$$

把上式改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \partial_i\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}x^i = (\mathrm{d}x^i\boldsymbol{g}_i) \cdot (\boldsymbol{g}^s\partial_s\boldsymbol{\Phi}) \tag{3.3.5}$$

这样再引进 Hamilton 算子(或称微分矢量算子)，用 ∇ 表示

$$\nabla = \boldsymbol{g}^s\partial_s \tag{3.3.6}$$

于是式(3.3.5) 就可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi} \tag{3.3.7}$$

由于 $d\boldsymbol{r}$ 是与 $\boldsymbol{\Phi}$ 无关的一阶张量(矢量),根据商法则可知,$\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 必然是比 $d\boldsymbol{\Phi}$(也就是比 $\boldsymbol{\Phi}$)高一阶的张量。也就是说,Hamilton 算子 ∇ 使原张量升高一阶。

对照式(3.3.1) 和式(3.3.7),仿照对标量场 ϕ 梯度的定义,我们把 ∇ 作用在张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 上所构成的新张量场 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$(在它有定义的区域内) 称为 **$\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度或 $\boldsymbol{\Phi}$ 的绝对导数**

把 $\boldsymbol{\Phi}$ 的并基展开式代入 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 中,就可得到 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 的并基展开式

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{g}^s\partial_s(\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l) \\ &= \boldsymbol{g}^s(\partial_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\partial_s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\partial_s\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\partial_s\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\partial_s\boldsymbol{g}^l) \\ &= \boldsymbol{g}^s(\partial_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\Gamma^r_{si}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\Gamma^r_{sj}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l - \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\Gamma^k_{sr}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^l - \phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\Gamma^l_{sr}\boldsymbol{g}^r)\end{aligned}$$

注意上式后四项,第一项中把 i 换成 r,第二项中把 j 换成 r,第三项中把 k 换成 r,第四项中把 l 换成 r。则上式就变为

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} = (\partial_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \Gamma^i_{rs}\phi^{rj}_{\cdot\cdot kl} + \Gamma^j_{rs}\phi^{ir}_{\cdot\cdot kl} - \Gamma^r_{sk}\phi^{ij}_{\cdot\cdot rl} - \Gamma^r_{sl}\phi^{ij}_{\cdot\cdot kr})\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{3.3.8}$$

现在引进一个符号

$$\nabla_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl} = \partial_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \Gamma^i_{sr}\phi^{rj}_{\cdot\cdot kl} + \Gamma^j_{sr}\phi^{ir}_{\cdot\cdot kl} - \Gamma^r_{sk}\phi^{ij}_{\cdot\cdot rl} - \Gamma^r_{sl}\phi^{ij}_{\cdot\cdot kr} \tag{3.3.9}$$

它就是式(3.3.8) 中 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 张量的分量,称为**协变导数**。组成它的每一项都不按张量规律变化,但合起来却是张量的分量。于是式(3.3.8) 就可写成

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} = \nabla_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{3.3.10a}$$

由式(3.3.10a) 看出,Hamilton 算子可写成

$$\nabla = \boldsymbol{g}^s\ \nabla_s \tag{3.3.11a}$$

不过这里要注意,∇_s 只对 $\boldsymbol{\Phi}$ 的分量起作用,而对并基不起作用,并且一般 $\nabla_s \neq \partial_s$。

既然协变导数的指标是张量的指标,就可以用度量张量将指标上升而得"逆变导数"

$$\nabla^r\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl} = g^{rs}\ \nabla_s\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl} \tag{3.3.12}$$

利用逆变导数,也可将式(3.3.8) 写成

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} = \nabla^r\phi^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{3.3.10b}$$

也可将 Hamilton 算子写成

$$\nabla = \boldsymbol{g}_r\ \nabla^r \tag{3.3.11b}$$

其中

$$\nabla^r = g^{rs}\ \nabla_s \tag{3.3.11c}$$

上述关于张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度的定义虽然是对四阶张量写出的,但它事实上对任意阶张量都是适用的。所以参照式(3.3.10a) 可以把任意阶张量的梯度的不变性记法写成

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} = \nabla_s\phi^{i\cdots j}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l \tag{3.3.13}$$

3.3.3 协变导数

从张量场的梯度表达式来看,只要写出张量分量的协变导数,就很容易求得梯度了。而计算张量分量的协变导数所遵循的规则是:用协变导数算子 ∇_s 作用于张量的分量时,除了普通的偏导数项以外,还出现与张量的阶数一样多的,带有第二类克氏符号的那些项,它们中的每一项是这样构成:克氏符号的第一个下标一律是协变导数算子的指标 s,张量分量的上标,应出现在克氏符号的上标,张量分量的上标处与克氏符号的第二个下标取成哑指标,并且这样的项前面取正号;张量分量的下标,应出现在克氏符号的第二个下标处,张量分量的下标与克氏符号的上标取成哑指标,并且这样的项前面取负号。

由协变导数的运算规则可知，在直线坐标系下，因为克氏符号恒为零，所以协变导数直接由偏导数表达。也就是说，只有在直线坐标系下，偏导数才按张量规律变换。我们经常利用这个性质，在直角笛卡尔坐标系下推导公式，然后把偏导数换成协变导数直接给出曲线坐标系下的张量公式。

下面我们来看几种特殊的情形。

1.标量场

标量场 $\phi(x^i)$ 是零阶张量场，不论在何种坐标系下，协变导数中均不出现带有克氏符号的项。所以有

$$\nabla_i \phi = \partial_i \phi$$

因此

$$\nabla \phi = \boldsymbol{g}^i \partial_i \phi = \mathbf{grad}\ \phi$$

由此看出，张量场的梯度是标量场梯度的直接推广。所以我们常常把张量场的梯度 $\nabla \boldsymbol{\Phi}$ 写成 $\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\Phi}$，即

$$\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\Phi} = \nabla \boldsymbol{\Phi} \tag{3.3.14}$$

2.矢量场

对于矢量场 $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v_i \boldsymbol{g}^i$，其分量的协变导数为

$$\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sr} v^r \tag{3.3.15a}$$

$$\nabla_s v_i = \partial_s v_i - \Gamma^r_{si} v_r \tag{3.3.15b}$$

3.度量张量场

对于度量张量场

$$\boldsymbol{G} = g_{ij} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j = \delta^i_j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j = g^{ij} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j$$

由于在直角笛卡尔坐标系下

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}, \qquad \nabla \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

所以

$$\nabla_s g_{ij} = 0, \quad \nabla_s \delta^i_j = 0, \quad \nabla_s g^{ij} = 0 \tag{3.3.16a}$$

而对于任意曲线坐标系，度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的梯度的并基展开式为

$$\nabla \boldsymbol{G} = \nabla_i g_{jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k = \nabla_i \delta^j_k \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k = \nabla_i g^{jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k$$

根据协变导数的运算规则，有

$$\nabla_i g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^m_{ij} g_{mk} - \Gamma^m_{ik} g_{jm}$$

由式(3.2.5a)，即克氏符号的升降标规则，可得

$$\nabla_i g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{ikj}$$

再由式(3.2.6)，上式还可以改写为

$$\nabla_i g_{jk} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{ikj} = 0 \tag{3.3.16b}$$

类似地，也可以得到

$$\nabla_i g^{jk} = 0 \tag{3.3.16c}$$

而

$$\nabla_i \delta^j_k = \frac{\partial \delta^j_k}{\partial x^i} + \Gamma^j_{im} \delta^m_k - \Gamma^m_{ik} \delta^j_m$$

$$= 0 + \Gamma_{ik}^{j} - \Gamma_{ik}^{j} = 0 \tag{3.3.16d}$$

由此可见，在曲线坐标系中，度量张量的分量不是常数，其普通偏导数不为零。但其协变导数为零，说明度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的梯度 $\nabla \boldsymbol{G}$ 恒为零。这表明，度量张量 $\boldsymbol{G}$ 是不随空间点的位置而变化的“常”张量，我们称之为均匀场。

4. Eddington 张量场

再看 Eddington 张量场(置换张量场)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k$$

则它的分量 ε^{ijk} 的协变导数为

$$\nabla_s\varepsilon^{ijk} = \partial_s\varepsilon^{ijk} + \Gamma_{sr}^{i}\varepsilon^{rjk} + \Gamma_{sr}^{j}\varepsilon^{irk} + \Gamma_{sr}^{k}\varepsilon^{ijr}$$

因为上式右端第一项为

$$\begin{aligned}
\partial_s\varepsilon^{ijk} &= \partial_s[\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] \\
&= [\partial_s\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] + [\boldsymbol{g}^i \quad \partial_s\boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] + [\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \partial_s\boldsymbol{g}^k] \\
&= [(-\Gamma_{sr}^{i}\boldsymbol{g}^r) \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] + [\boldsymbol{g}^i \quad (-\Gamma_{sr}^{j})\boldsymbol{g}^r \quad \boldsymbol{g}^k] + [\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad (-\Gamma_{sr}^{k}\boldsymbol{g}^r)] \\
&= -\Gamma_{sr}^{i}[\boldsymbol{g}^r \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^k] - \Gamma_{sr}^{j}[\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^r \quad \boldsymbol{g}^k] - \Gamma_{sr}^{k}[\boldsymbol{g}^i \quad \boldsymbol{g}^j \quad \boldsymbol{g}^r] \\
&= -\Gamma_{sr}^{i}\varepsilon^{rjk} - \Gamma_{sr}^{j}\varepsilon^{irk} - \Gamma_{sr}^{k}\varepsilon^{ijr}
\end{aligned}$$

因此有

$$\nabla_s\varepsilon^{ijk} = 0 \tag{3.3.17a}$$

同理可以得到

$$\nabla_s\varepsilon_{ijk} = 0 \tag{3.3.17b}$$

这说明 Eddington 张量场也是均匀场。

正因为度量张量场和 Eddington 张量场都是均匀场，因此它们犹如常数一样，可以移进或移出协变导数的内外，如

$$\nabla_s(g_{ij}\phi^{kl}) = g_{ij}(\nabla_s\phi^{kl})$$

5. 协变导数运算的一些法则

(1) 协变导数运算是线性运算

$$\nabla_s(\alpha T^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \beta S^{ij}_{\cdot\cdot kl}) = \alpha\, \nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \beta\, \nabla_s S^{ij}_{\cdot\cdot kl} \tag{3.3.18}$$

式中，α，β 是常数。

(2) 莱布尼兹法则

以三阶张量的分量 $T^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 为例，其协变导数

$$\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k} = \partial_s T^{ij}_{\cdot\cdot k} + \Gamma_{sm}^{i}T^{mj}_{\cdot\cdot k} + \Gamma_{sm}^{j}T^{im}_{\cdot\cdot k} - \Gamma_{sk}^{m}T^{ij}_{\cdot\cdot m}$$

它是四阶张量的分量。若将其 i，k 指标进行一次缩并，则得到

$$\begin{aligned}
\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} &= \partial_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} + \Gamma_{sm}^{i}T^{mj}_{\cdot\cdot i} + \Gamma_{sm}^{j}T^{im}_{\cdot\cdot i} - \Gamma_{si}^{m}T^{ij}_{\cdot\cdot m} \\
&= \partial_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} + \Gamma_{si}^{m}T^{ij}_{\cdot\cdot m} + \Gamma_{sm}^{j}T^{im}_{\cdot\cdot i} - \Gamma_{si}^{m}T^{ij}_{\cdot\cdot m} \\
&= \partial_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} + \Gamma_{sm}^{j}T^{im}_{\cdot\cdot i}
\end{aligned}$$

若交换运算次序，将 $T^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 的指标 i，k 先进行一次缩并，则得到一阶张量(矢量)的分量 $D^j = T^{ij}_{\cdot\cdot i}$，然后对 D^j 求协变导数，得到

$$\nabla_s D^j = \partial_s D^j + \Gamma_{sm}^{j}D^m = \partial_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} + \Gamma_{sm}^{j}T^{im}_{\cdot\cdot i}$$

故两种交换先后次序的运算得到相同的结果，即

$$\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot i} = \nabla_s D^j$$

这就证明对张量分量缩并与求协变导数的次序可以调换。

(3) 两个张量分量乘积的协变导数服从函数乘积的普通偏导数的运算规则

例如,设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶张量,$\boldsymbol{B}$ 为二阶张量,则

$$\nabla_s(A^{ij}_{\cdot\cdot k}B^l_{\cdot m}) = \nabla_s A^{ij}_{\cdot\cdot k}B^l_{\cdot m} + A^{ij}_{\cdot\cdot k}(\nabla_s B^l_{\cdot m}) \tag{3.3.19}$$

上式可以这样证明。设

$$C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot m} = A^{ij}_{\cdot\cdot k}B^l_{\cdot m} \tag{3.3.20a}$$

此式的抽象记法为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \tag{3.3.20b}$$

则

$$\begin{aligned}\nabla_s C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot m} = {} & C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot m,s} + \Gamma^i_{sp}C^{pj\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot m} + \Gamma^j_{sp}C^{ip\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot m} \\ & - \Gamma^p_{sk}C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot p\cdot m} + \Gamma^l_{sp}C^{ij\cdot p}_{\cdot\cdot k\cdot m} - \Gamma^p_{sm}C^{ij\cdot l}_{\cdot\cdot k\cdot p}\end{aligned}$$

而

$$\nabla_s A^{ij}_{\cdot\cdot k} = A^{ij}_{\cdot\cdot k,s} + \Gamma^i_{sp}A^{pj}_{\cdot\cdot k} + \Gamma^j_{sp}A^{ip}_{\cdot\cdot k} - \Gamma^p_{sk}A^{ij}_{\cdot\cdot p}$$

$$\nabla_s B^l_{\cdot m} = B^l_{\cdot m,s} + \Gamma^l_{sp}B^p_{\cdot m} - \Gamma^p_{sm}B^l_{\cdot p}$$

利用式(3.3.20a) 和以上三式,即可证得式(3.3.19)。

但在这里应特别注意,∇_s 只作用于张量分量。因此由式(3.3.20b) 决不能导致

$$\nabla(\boldsymbol{AB}) = (\nabla\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\boldsymbol{B})$$

即上式对任意阶张量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 不能成立。这是因为

$$\text{左端} = \nabla(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^i}$$

而

$$\text{右端} = (\nabla\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\nabla\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_i\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^i}$$

一般来说,左右两端并不相等。只有当 $\boldsymbol{A}$ 为标量 ϕ,$\boldsymbol{B}$ 为矢量 $\boldsymbol{v}$ 时,才有

$$\nabla(\phi\boldsymbol{v}) = (\nabla\phi)\boldsymbol{v} + \phi(\nabla\boldsymbol{v}) \tag{3.3.21}$$

同样地

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \neq (\nabla\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{B})$$

这是因为上式中

$$\text{左端} = \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^i}$$

$$\text{右端} = (\nabla\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x^i}$$

一般来说,左右两端是不相等的。仅当 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为矢量 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 时,才有

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{g}^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^i} \\ &= \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{u} = (\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

3.3.4 左梯度和右梯度

我们在上面讨论的张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 是 Hamilton 算子从左边作用于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的情形,常常

把这种梯度称作左梯度。下面我们可以完全类似地引进关于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右梯度。

由于任意阶张量 $\boldsymbol{\Phi} = \phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l$ 的绝对微分可以写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} = (\mathrm{d}x^p\boldsymbol{g}_p)\cdot(\nabla\boldsymbol{\Phi})$$

现在把它改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi} &= (\mathrm{d}x^p\boldsymbol{g}_p)\cdot(\nabla_s\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l)\\ &= \mathrm{d}x^p\ \nabla_s\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}(\boldsymbol{g}_p\cdot\boldsymbol{g}^s)\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l\\ &= \mathrm{d}x^p\ \nabla_s\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l(\boldsymbol{g}^s\cdot\boldsymbol{g}_p)\\ &= \nabla_s\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^s\cdot(\mathrm{d}x^p\boldsymbol{g}_p)\end{aligned}$$

我们定义

$$\boldsymbol{\Phi}\nabla = \nabla_s\phi^{i\cdots j}{}_{k\cdots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^s \tag{3.3.23}$$

它表示 Hamilton 算子 ∇ 从 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右边作用的结果，故而把 $\boldsymbol{\Phi}\nabla$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右梯度。

其实 Hamilton 算子 ∇ 从左边作用和从右边作用是不一样的，即

$$(\quad)\nabla = \frac{\partial(\quad)}{\partial x^i}\boldsymbol{g}^i$$

$$\nabla(\quad) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial(\quad)}{\partial x^i} \tag{3.3.24}$$

因此，张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的左梯度和右梯度一般是不相同的。即

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} \neq \boldsymbol{\Phi}\nabla$$

只有在特殊情形下，如对于标量场，才有

$$\nabla\phi = \phi\nabla \tag{3.3.25}$$

对于矢量场 $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{g}^i$，有

$$\boldsymbol{v}\nabla = \nabla_s v_i\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^s = (\nabla\boldsymbol{v})_c \tag{3.3.26}$$

即矢量场的右梯度是它的左梯度的转置，它们互为共轭。

例 3.1 物体中线元 AB 可以用矢径的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示，当物体发生变形时，物体中各点有位移场 $\boldsymbol{u}(x^1,x^2,x^3)$，设 A 点坐标为 (x^1,x^2,x^3)，B 点坐标为 $(x^1+\mathrm{d}x^1,x^2+\mathrm{d}x^2,x^3+\mathrm{d}x^3)$。求 AB 两点的位移差 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$。

解

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

而因为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{g}^i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}\nabla)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

例 3.2 证明矢径 $\boldsymbol{r}$ 的梯度就是度量张量 $\boldsymbol{G}$。

解 由上例的结论，因为 $\boldsymbol{r}$ 也是一个矢量，故可令上例中的

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}$$

这样，就有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}\nabla)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

而我们知道，只有度量张量 $\boldsymbol{G}$ 与任意矢径 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的点积仍为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 自身，因此

$$\nabla \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\nabla = \boldsymbol{G}$$

这就证明了矢径 $\boldsymbol{r}$ 的梯度就是度量张量 $\boldsymbol{G}$。

3.4 张量场的散度·旋度和拉普拉斯算子

3.4.1 张量场的散度

对于一阶或一阶以上的张量场，可以定义张量场的散度。

设任意阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的并基展开式为

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\cdots\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^p\cdots\boldsymbol{g}^q\boldsymbol{g}^r$$

定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的散度

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} &= \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{g}^s\cdot\partial_s\boldsymbol{\Phi} = \nabla_s\phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr}(\boldsymbol{g}^s\cdot\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{g}_j\cdots\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^p\cdots\boldsymbol{g}^q\boldsymbol{g}^r \\
&= \nabla_s\phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr}\delta^s_i\boldsymbol{g}_j\cdots\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^p\cdots\boldsymbol{g}^q\boldsymbol{g}^r \\
&= \nabla_s\phi^{sj\cdots k}{}_{p\cdots qr}\boldsymbol{g}_j\cdots\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^p\cdots\boldsymbol{g}^q\boldsymbol{g}^r
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

显然，张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}$（或 $\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}$）就是梯度的第一、第二指标的缩并，因此它是比梯度 $\nabla\boldsymbol{\Phi}$ 低二阶、比 $\boldsymbol{\Phi}$ 低一阶的张量。

对于矢量场（一阶张量场）$\boldsymbol{v} = v^s\boldsymbol{g}_s$，有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla_s v^s = \partial_s v^s + \Gamma^s_{sr}v^r \tag{3.4.2}$$

而特别当我们取正交笛卡尔坐标系时，此时克氏符号为零，因此

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \partial_s v^s = v_{i,i} \tag{3.4.3}$$

这正是场论中矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的散度公式，所以式(3.4.2)就是矢量场散度的不变性记法。它适用于一切坐标系。而式(3.4.1)定义的 $\boldsymbol{\Phi}$ 的散度也是矢量场散度的直接推广。

而由式(3.2.12)可知

$$\Gamma^s_{rs} = \Gamma^s_{sr} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}$$

把它代入式(3.4.2)得

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{v} &= \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \partial_s v^s + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}v^r = \partial_r v^r + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}v^r \\
&= \frac{\partial v^r}{\partial x^r} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}v^r = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^r}(\sqrt{g}v^r) = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_r(\sqrt{g}v^r)
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

利用式(3.4.4)在曲线坐标系中计算 $\boldsymbol{v}$ 的散度是方便的。

散度的概念在流体力学中是很重要的，如果 $\boldsymbol{v}$ 是流体的速度场，则散度就是每单位体积在每单位时间内流出的流量。而 $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})$ 就是每单位体积在每单位时间内流出的质量（ρ 为流体的质量密度）。

3.4.2 张量场的旋度

对于一阶或一阶以上的张量场，可以定义张量场的旋度。

设任意阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的并基展开式为

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{i}^{\cdot j \cdots k}{}_{p \cdots qr} \boldsymbol{g}^{i} \boldsymbol{g}_{j} \cdots \boldsymbol{g}_{k} \boldsymbol{g}^{p} \cdots \boldsymbol{g}^{q} \boldsymbol{g}^{r}$$

定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的旋度

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\Phi} &= \nabla \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{g}^{s} \times \partial_{s} \boldsymbol{\Phi} \\ &= \nabla_{s} \phi_{i}^{\cdot j \cdots k}{}_{p \cdots qr} (\boldsymbol{g}^{s} \times \boldsymbol{g}^{i}) \boldsymbol{g}_{j} \cdots \boldsymbol{g}_{k} \boldsymbol{g}^{p} \cdots \boldsymbol{g}^{q} \boldsymbol{g}^{r} \\ &= \nabla_{s} \phi_{i}^{\cdot j \cdots k}{}_{p \cdots qr} \varepsilon^{lsi} \boldsymbol{g}_{l} \boldsymbol{g}_{j} \cdots \boldsymbol{g}_{k} \boldsymbol{g}^{p} \cdots \boldsymbol{g}^{q} \boldsymbol{g}^{r} \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

上式也可以写成

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\Phi} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varepsilon} : \nabla \boldsymbol{\Phi} \tag{3.4.6}$$

很显然,$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\Phi}$ 是与 $\boldsymbol{\Phi}$ 同阶的张量。

对于矢量场 $\boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{g}^k$,其旋度为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k \boldsymbol{g}_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.4.7}$$

如果把上式进一步简化

$$\varepsilon^{ijk} \nabla_j v_k = \varepsilon^{ijk} (\partial_j v_k - \Gamma_{jk}^{m} v_m) = \varepsilon^{ijk} \partial_j v_k - \varepsilon^{ijk} \Gamma_{jk}^{m} v_m$$

则由于 ε^{ijk} 关于指标 j,k 是反对称的,而 Γ_{jk}^{m} 关于指标 j,k 是对称的,故上式中右端的第二项为零,所以

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = \varepsilon^{ijk} \partial_j v_k \boldsymbol{g}_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.4.8}$$

而当取正交笛卡尔坐标系时,因 $g = 1$,故有

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.4.9}$$

这就是普通场论中矢量场的旋度公式。因此,式(3.4.7)或式(3.4.8)就是适用于一切坐标系的矢量场旋度的不变性记法。由此也可以看出张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\Phi}$ 正是矢量场旋度的直接推广。

3.4.3 左散度和右散度、左旋度和右旋度

正如我们在前面介绍过的梯度有左梯度和右梯度之分一样。我们在前面 3.4.1、3.4.2 中讨论的散度和旋度就称为**左散度**和**左旋度**。当然也可以定义右散度和右旋度。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla &= \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^s} \cdot \boldsymbol{g}^s = \nabla_s \phi^{ij \cdots k}{}_{p \cdots q}{}^{r} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}_r \cdot \boldsymbol{g}^s \\ &= \nabla_s \phi^{ij \cdots k}{}_{p \cdots q}{}^{r} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \delta_r^s \\ &= \nabla_s \phi^{ij \cdots k}{}_{p \cdots q}{}^{s} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} \times \nabla &= \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^s} \times \boldsymbol{g}^s = \nabla_s \phi^{ij \cdots k}{}_{p \cdots qr} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r \times \boldsymbol{g}^s \\ &= \varepsilon^{rst} \nabla_s \phi^{ij \cdots k}{}_{p \cdots qr} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}_t \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

我们把 $\boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右散度,把 $\boldsymbol{\Phi} \times \nabla$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右旋度。

对于矢量场 $\boldsymbol{v}$,显然有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$
$$\nabla \times \boldsymbol{v} = - \boldsymbol{v} \times \nabla \tag{3.4.12}$$

但是对于其他的张量场 $\boldsymbol{\Phi}$,一般没有上述的性质,也就是说

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} \neq \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla$$
$$\nabla \times \boldsymbol{\Phi} \neq - \boldsymbol{\Phi} \times \nabla \tag{3.4.13}$$

3.4.4 张量场的拉普拉斯(Laplace)算子

对于任意阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$,我们定义拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{\Phi} &= \mathrm{div}\,(\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\Phi}) = \nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{g}^l \cdot \partial_l (\boldsymbol{g}^s \partial_s \boldsymbol{\Phi}) \\
&= \boldsymbol{g}^l \cdot \partial_l (\nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r) \\
&= \boldsymbol{g}^l \cdot \nabla_l \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r \\
&= \nabla_l \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} (\boldsymbol{g}^l \cdot \boldsymbol{g}^s) \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r \\
&= g^{ls} \ \nabla_l \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r \\
&= \nabla^s \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

式中

$$\nabla_l \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} = \nabla_l (\nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr}) \tag{3.4.15}$$

是对 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度 $\nabla \boldsymbol{\Phi}$ 再求梯度的分量,即是

$$\nabla \ \nabla \boldsymbol{\Phi} = \nabla_l \ \nabla_s \phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr} \boldsymbol{g}^l \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \cdots \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^p \cdots \boldsymbol{g}^q \boldsymbol{g}^r \tag{3.4.16}$$

的分量,称为 $\phi^{ij\cdots k}{}_{p\cdots qr}$ **的二阶协变导数**。

特别地,对于标量场 $\phi = \phi(x^i)$,它在拉普拉斯算子作用下的结果是

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \nabla^s \ \nabla_s \phi = g^{ls} \ \nabla_l \ \nabla_s \phi = g^{ls} \ \nabla_l (\partial_s \phi) \\
&= g^{ls} (\partial_l \partial_s \phi - \Gamma^r_{ls} \partial_r \phi)
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

当取正交笛卡尔坐标系时,克氏符号全为零,并且 $g^{ls} = \delta_{ls}$,于是上式就简化为

$$\nabla^2 \phi = \delta_{ls} \partial_l \partial_s \phi = \partial_s \partial_s \phi = \phi_{,ss} \tag{3.4.18}$$

这就是普通场论中标量场 ϕ 在拉普拉斯算子作用下的结果,所以式(3.4.17)就是标量场的拉普拉斯算子的不变性记法,它适用于一切坐标系。由此可以看出,张量场的拉普拉斯算子(即张量场在拉普拉斯算子作用下的结果)正是普通场论中标量场的拉普拉斯算子的直接推广。

例 3.3 已知:$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 为矢量场函数,求证:

$$\nabla (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u})$$

证明 上式右端为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \times \left(\boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} \right) + \boldsymbol{v} \times \left(\boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \right) + \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) \\
&= \left(\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} \right) \boldsymbol{g}^i - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g}^i) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} + \left(\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \right) \boldsymbol{g}^i - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}^i) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} + \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \right) \boldsymbol{g}^i - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) \\
&= \left(\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \right) \boldsymbol{g}^i
\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$$

$$= \nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$$

它等于上式左端,从而得证。

例 3.4 已知:$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 为矢量场函数,求证:

$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v})$$

证明 上式左端为

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}^i \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \times \boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{g}^i \times \left(\boldsymbol{u} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\right) \\
&= (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{v}) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} - \left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i}\right)\boldsymbol{v} + \left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\right)\boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{u} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\right) \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} - \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i}\right) + \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}\right) - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} \\
&= \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

它等于上式右端,从而得证。

例 3.5 已知某矢量场函数 $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = 0$, $\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0$。

求证:$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{u} = 0$。

证明 因为

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^j \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) = \boldsymbol{g}^i \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) + \boldsymbol{g}^i \times \left[\boldsymbol{g}^j \times \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right)\right] \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\right) + \boldsymbol{g}^j\left[\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right)(\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\right) + \boldsymbol{g}^j\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^i \partial x^j}\right) - (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j) \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{g}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) - \boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^j \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) \\
&= \boldsymbol{g}^i\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) + \boldsymbol{g}^i\left(\boldsymbol{g}^j \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\
&\quad - \left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j} - (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j) \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}$$

所以上面两式相减得

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) - [\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{u})] \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) - \boldsymbol{g}^i\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial x^i} \times \boldsymbol{g}^i\right) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j} \times [(-\Gamma^j_{im}\boldsymbol{g}^m) \times \boldsymbol{g}^i] \\
&= -\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j} \times (\Gamma^j_{im}\boldsymbol{g}^m \times \boldsymbol{g}^i) \\
&= -\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j} \times \varepsilon^{mil}\Gamma^j_{im}\boldsymbol{g}_l
\end{aligned}$$

又因为 ε^{mil} 对于指标 i,m 是反对称的,而 Γ^{l}_{im} 对于指标 i,m 是对称的,所以

$$\varepsilon^{mil}\Gamma^{l}_{im} = 0$$

即

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) - [\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{u})] = 0$$

由已知条件知

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = 0$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

所以最后证得

$$\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) = 0$$

*3.5 Rieman – Christoffel 张量(曲率张量)·欧氏空间中二阶协变导数的可交换性

3.5.1 Euclidean 空间与 Riemann 空间

Euclidean 空间是指 Euclidean 几何学能够成立的空间。Euclidean 几何学是建立在一些公理的基础上的,这些公理如两点之间只能连一根直线;由平行公理导出的三角形三内角之和等于 180° 等。例如,平面是二维的 Euclidean 空间。如果将平面进行弯曲,弯曲过程中仍保持平面上的线段长度不变,于是,平面变换成了**可展曲面**,如圆柱面,圆锥面;这种变换称为**等距变换**。等距变换后的二维空间仍旧保持了平面的内在性质,Euclidean 几何学仍能适用,这类空间称为 **Euclidean 空间**,与平面不同,像球面这样的二维空间中 Euclidean 几何学不能适用,平面也无法通过等距变换变为球面,所以球面不是二维的 Euclidean 空间。

一维的 Euclidean 空间 E^1 是一根实数直线,n 个互相正交的一维 Euclidean 空间构成 n 维 Euclidean 空间 E^n,所以 n 维 Euclidean 空间的每个点可以与 n 个独立的有序的实变数 x^i($i = 1,2,\cdots,n$)建立一一对应的关系(称为坐标)。对于 Euclidean 空间,必定存在一个适用于全空间的笛卡尔坐标系,所以 Euclidean 空间也称为笛卡尔空间,而其他的坐标系与此笛卡尔坐标系满足一一对应的坐标转换关系。在 Euclidean 空间中直线坐标系是允许的,它可使 $g_{ij} \equiv \mathrm{const}$,从而 $\Gamma^{k}_{ij} \equiv 0$,并且矢量的点积(或者说度量张量)有定义

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^i v_i = g_{ij} u^i v^j$$

从 n 维 Euclidean 空间中取出一个子空间,例如从三维 Euclidean 空间中取出一个二维曲面。在除柱面,锥面外的一般曲面上,Euclidean 几何学一般不能适用,例如球面上三角形三内角之和大于 180°;在地球表面,南北极之间可通过无数的大圆等。在工程实际中,也有许多非 Euclidean 空间的问题需要研究,例如薄壳结构分析,进行复杂曲面的机械加工时加工方法的设计等。

Riemann 仿照 Euclidean 几何的方式在曲面上建立了 Riemann 几何学。在 **Riemann 空间**中,一般来说找不到一个适用于全空间的笛卡尔坐标系,即找不到一个坐标系使 $g_{ij} \equiv \mathrm{const}$,从而 $\Gamma^{k}_{ij} \equiv 0$,如球面就是二维的 Riemann 空间。

3.5.2 Riemann – Christoffel 张量（曲率张量）

设矢量场为 $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{g}^i$，我们来求它的二阶协变导数（即求梯度的梯度）

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j v_i &= \nabla_k(v_{i,j} - \Gamma^r_{ij}v_r) = \partial_k(v_{i,j} - \Gamma^r_{ij}v_r) \\ &\quad - \Gamma^s_{ik}(v_{s,j} - \Gamma^r_{sj}v_r) - \Gamma^s_{kj}(v_{i,s} - \Gamma^r_{is}v_r) \\ &= v_{i,jk} - \Gamma^r_{ij}v_{r,k} - \Gamma^s_{ik}v_{s,j} - \Gamma^s_{kj}v_{i,s} \\ &\quad - v_r(\Gamma^r_{ij,k} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{sj} - \Gamma^s_{kj}\Gamma^r_{is})\end{aligned}$$

同理，如果交换二阶协变导数的运算顺序（即 k,j 的顺序），则有

$$\begin{aligned}\nabla_j \nabla_k v_i &= v_{i,kj} - \Gamma^r_{ik}v_{r,j} - \Gamma^s_{ij}v_{s,k} - \Gamma^s_{jk}v_{i,s} \\ &\quad - v_r(\Gamma^r_{ik,j} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{sk} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^r_{is})\end{aligned}$$

现在考察以上两式之差，并注意到普通偏导数的运算顺序是可以交换的，并且第二类 Γ 氏符号对第一、第二指标是对称的，于是

$$\nabla_k \nabla_j v_i - \nabla_j \nabla_k v_i = v_r(\Gamma^r_{ik,j} - \Gamma^r_{ij,k} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{sk}) = v_r R^r_{\cdot ijk} \tag{3.5.1}$$

其中

$$R^r_{\cdot ijk} = \Gamma^r_{ik,j} - \Gamma^r_{ij,k} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{sk} \tag{3.5.2a}$$

很明显，矢量分量的协变导数是二阶张量的分量，对二阶张量的分量再求一次协变导数就是三阶张量的分量。所以式(3.5.1) 的左端是三阶张量的分量，而右端是矢量与 $R^r_{\cdot ijk}$ 的点积，由商法则，可知 $R^r_{\cdot ijk}$ 一定是四阶张量的分量。通常我们把它称为 **Riemann – Christoffel 张量或曲率张量**，记做 $\boldsymbol{R}$，其并基展开式为

$$\boldsymbol{R} = R^r_{\cdot ijk}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k = (\Gamma^r_{ik,j} - \Gamma^r_{ij,k} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{sj} - \Gamma^s_{ij}\Gamma^r_{sk})\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k \tag{3.5.2b}$$

3.5.3 欧氏空间中二阶协变导数的可交换性

由式(3.5.2) 可知，Riemann – Christoffel 张量的每个分量只与度量张量有关，这是因为克氏符号完全可以用度量张量来表示，这在前面已经介绍过。

另外，我们知道，在直线坐标系中克氏符号全为零，因此由式(3.5.2) 可知，曲率张量的分量全为零。即 Riemann – Christoffel 张量为零张量，从而在其他任意的曲线坐标系中，它的分量也应全为零。这样由式(3.5.1) 可知其右端为零，即

$$\nabla_k \nabla_j v_i - \nabla_j \nabla_k v_i = 0 \tag{3.5.3}$$

从而说明了在 Euclidean 空间中，二阶协变导数的运算顺序是可以交换的。

而在 Riemann 空间中，因为一般来说找不到一个适用于全空间的笛卡尔坐标系，使得 $g_{ij} \equiv \text{const}$，从而 $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$。所以 Riemann – Christoffel 张量不是零张量。也就是说，在 Riemann 空间中一般不能任意改变二阶协变导数的运算顺序。

总之，Euclidean 空间与 Riemann 空间虽然都存在着度量张量，但它们的区别是 Riemann – Christoffel 张量是否为零。在 Euclidean 空间中，曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 为零，而在 Riemann 空间中，曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 一般不为零。以二维空间为例，平面是允许直线坐标系的，是 Euclidean 空间，也叫**平坦空间**，曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 为零；但球面是不允许直线坐标系的，属 Riemann 空间，它的曲率张量 $\boldsymbol{R}$ 不为零，我们说这个空间是**弯曲**的。

3.6 完整系与非完整系·物理分量

3.6.1 完整系与非完整系

在前面的章节中,张量都是对协变基矢量或逆变基矢量分解的,根据定义,协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 由矢径 $\boldsymbol{r}$ 对坐标 x^i 的偏导数惟一确定,即

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{3.6.1}$$

而逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^j$ 则由对偶关系惟一确定,即

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j \tag{3.6.2}$$

按式(3.6.1)由坐标确定的基矢量称为**自然基矢量**,它们构成了**完整系**。在完整系中,张量的许多运算规则都可以看作是通常数量运算规则的某种推广,所以它是张量分析中最基本的参考系,但在应用中,它也有不便之处。

由定义(3.6.1)可以看出,矢径 $\boldsymbol{r}$ 具有长度量纲,而任意曲线坐标 x^i 不一定具有长度量纲,且 $|\boldsymbol{g}_i| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right|$ 不一定等于 1,所以自然基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 不一定是无量纲的单位矢量。如果把具有物理意义的矢量或张量对自然基矢量分解,则所得的分量不一定具有原来的物理量纲。

以圆柱坐标系为例,坐标 $x^1 = r$ 和 $x^3 = z$ 为长度量纲,且模 $|\boldsymbol{g}_1| = |\boldsymbol{g}_3| = 1$,因而 $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_3$ 是无量纲单位矢量;但坐标 $x^2 = \theta$ 是无量纲的,且 $|\boldsymbol{g}_2| = r$,因为 $\boldsymbol{g}_2$ 具有长度量纲,且其大小随点而异。如果把一个力矢量 $\boldsymbol{P}$ 对 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ 分解,分量的量纲将等于原物理量纲除以相应基矢量的量纲,所以分量 p^1, p^3 仍具有力的量纲[F];但分量 p^2 的量纲为[F/L]([L]表示长度量纲),且 p^2 的大小要比力 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{g}_2$ 方向上的物理分量缩小 r 倍。

显然量纲不统一对分析物理问题是很不方便的,为此我们引进另一组协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$,只要求它们满足如下两个条件:

1. $\boldsymbol{g}_{(i)}(i = 1,2,3)$ 互相不共面;
2. 与自然基矢量 $\boldsymbol{g}_j$ 具有线性变换关系

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \beta_{(i)}^j \boldsymbol{g}_j \tag{3.6.3}$$

在保证条件1的前提下,上式中的9个转换系数 $\beta_{(i)}^j$ 可以根据物理分析更为方便的原则任意选择。

相应地,由对偶关系

$$\boldsymbol{g}_{(i)} \cdot \boldsymbol{g}^{(j)} = \delta_{(i)}^{(j)} \tag{3.6.4}$$

再引进一组逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(j)}$。它与完整系逆变基矢量的转换关系是

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \beta_j^{(i)} \boldsymbol{g}^j \tag{3.6.5}$$

也可以证明转换系数 $\beta_{(i)}^j$ 和 $\beta_j^{(i)}$ 之间满足如下的互逆关系

$$\begin{aligned} \beta_{(i)}^j \beta_j^{(k)} &= \delta_{(i)}^{(k)} \\ \beta_i^{(k)} \beta_{(k)}^j &= \delta_i^j \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

一般来说,按式(3.6.3)引进的基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 并不是自然基矢量,即并不存在能按式(3.6.

1）惟一确定 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 的新曲线坐标系 $x^{(i)}$。因为我们曾在第一章中指出：新、老两组自然基矢量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}_i$ 之间的转换系数应按如下两式来计算

$$\beta_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \tag{3.6.7}$$

$$\beta_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \tag{3.6.8}$$

这里每式都包含9个方程。当老坐标系 x^j 选定后，转换系数 $\beta_{i'}^j$ 和 $\beta_j^{i'}$ 就不能再任意选择，否则仅靠调整三个新坐标 $x^{i'}$ 使之同时满足9个独立方程是不可能的。假设 x^j 是对应于自然基矢量 $\boldsymbol{g}_j$（见式(3.6.1)）的坐标，由方程式(3.6.8)求解 $x^{i'}$ 的可积条件是

$$\beta_{j,k}^{i'} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right) = \beta_{k,j}^{i'} \tag{3.6.9}$$

如果不满足这个条件，则新坐标 $x^{i'}$ 就不存在。但是现在式(3.6.3)或式(3.6.5)中的转换系数 $\beta_{(i)}^j$ 或 $\beta_j^{(i)}$ 是以方便为原则任意选取的，并不一定满足可积条件，所以一般说并不存在能导出 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 的新曲线坐标系 $x^{(i)}$，这种只有基矢量而不存在相应曲线坐标的参考系称为**非完整系**。基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 和 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 分别称为非完整系的协变基矢量和逆变基矢量。为了区别于完整系，相应于非完整系的指标一律加圆括号。

与第一章相似，存在如下一系列关系式。

完整系基矢量用非完整系基矢量表示的转换关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^k &= \beta_{(i)}^k \boldsymbol{g}^{(i)} \\ \boldsymbol{g}_k &= \beta_k^{(i)} \boldsymbol{g}_{(i)}\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

非完整系度量张量的协变分量、逆变分量的定义为

$$\begin{aligned}g_{(i)(j)} &= \boldsymbol{g}_{(i)} \cdot \boldsymbol{g}_{(j)} \\ g^{(i)(j)} &= \boldsymbol{g}^{(i)} \cdot \boldsymbol{g}^{(j)}\end{aligned} \tag{3.6.11a}$$

相应度量张量协变分量的行列式为

$$g_{(i)(j)} = \begin{vmatrix} g_{(1)(1)} & g_{(1)(2)} & g_{(1)(3)} \\ g_{(2)(1)} & g_{(2)(2)} & g_{(2)(3)} \\ g_{(3)(1)} & g_{(3)(2)} & g_{(3)(3)} \end{vmatrix} = [\boldsymbol{g}_{(1)} \quad \boldsymbol{g}_{(2)} \quad \boldsymbol{g}_{(3)}]^2 \tag{3.6.11b}$$

利用度量张量可对基矢量进行指标升降，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^{(i)} &= g^{(i)(j)} \boldsymbol{g}_{(j)} \\ \boldsymbol{g}_{(k)} &= g_{(k)(i)} \boldsymbol{g}^{(i)}\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

非完整系与完整系度量张量分量的转换关系为

$$\begin{aligned}g_{(i)(j)} &= \beta_{(i)}^k \beta_{(j)}^l g_{kl} \\ g^{(i)(j)} &= \beta_k^{(i)} \beta_l^{(j)} g^{kl}\end{aligned} \tag{3.6.13}$$

度量张量的并基展开式仍保持对于坐标的不变性，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j \\ &= g_{(i)(j)}\boldsymbol{g}^{(i)}\boldsymbol{g}^{(j)} = g^{(i)(j)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{g}_i = v_i\boldsymbol{g}^i = v^{(i)}\boldsymbol{g}_{(i)} = v_{(i)}\boldsymbol{g}^{(i)} \tag{3.6.15}$$

$\boldsymbol{v}$ 的分量的指标升降关系为

$$v_{(i)} = g_{(i)(j)} v^{(j)}$$
$$v^{(i)} = g^{(i)(j)} v_{(j)} \tag{3.6.16}$$

而完整系与非完整系中矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量的转换关系为

$$v^{(i)} = \beta_j^{(i)} v^j$$
$$v_{(i)} = \beta_{(i)}^j v_j$$
$$v^i = \beta_{(j)}^i v^{(j)}$$
$$v_i = \beta_i^{(j)} v_{(j)} \tag{3.6.17}$$

张量 $\boldsymbol{T}$ 的并基展开式为

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}{}_{\cdot\cdot kl} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l = \cdots$$
$$= T^{(i)(j)}{}_{\cdot\cdot(k)(l)} \boldsymbol{g}_{(i)} \boldsymbol{g}_{(j)} \boldsymbol{g}^{(k)} \boldsymbol{g}^{(l)} = \cdots \tag{3.6.18}$$

完整系与非完整系中 $\boldsymbol{T}$ 的分量的转换关系为

$$T^{(i)(j)}{}_{\cdot\cdot(k)(l)} = \beta_i^{(i)} \beta_j^{(j)} \beta_{(k)}^k \beta_{(l)}^l T^{ij}{}_{\cdot\cdot kl}$$
$$T^{ij}{}_{\cdot\cdot kl} = \beta_{(i)}^i \beta_{(j)}^j \beta_k^{(k)} \beta_l^{(l)} T^{(i)(j)}{}_{\cdot\cdot(k)(l)} \tag{3.6.19}$$
$$\cdots$$

应该指出,矢径的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是一个矢量。按式(3.6.1),它的分解式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^k \boldsymbol{g}_k = \mathrm{d}x^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)} \tag{3.6.20}$$

但这时并不存在坐标 $x^{(k)}$,所以 $\mathrm{d}x^{(k)}$ 并不表示坐标 $x^{(k)}$ 的微分。它只是由如下转换关系定义的、完整系坐标微分 $\mathrm{d}x^k$ 的一种线性组合

$$\mathrm{d}x^{(k)} = \beta_k^{(k)} \mathrm{d}x^k$$
$$\mathrm{d}x^k = \beta_{(k)}^k \mathrm{d}x^{(k)} \tag{3.6.21}$$

3.6.2 物理分量

设已知一组任意曲线坐标 x^i 导出的自然基矢量 $\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$。一般来说,它们并不是无量纲的单位矢量,也不一定互相正交。为了便于对物理问题进行分析,通常引进另一组非完整系协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$,它们是和自然基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 同方向的无量纲单位矢量,即令

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \frac{1}{|\boldsymbol{g}_i|} \boldsymbol{g}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{\overline{ii}}}} \boldsymbol{g}_i = \beta_{(i)}^j \boldsymbol{g}_j \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{3.6.22}$$

显然变换系数为

$$\beta_{(i)}^j = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ \dfrac{1}{\sqrt{g_{\overline{ii}}}}, & \text{当 } i = j \end{cases} \tag{3.6.23a}$$

其中 $\sqrt{g_{\overline{ii}}} = \sqrt{\boldsymbol{g}_{\overline{i}} \cdot \boldsymbol{g}_{\overline{i}}}$ 是自然基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的模。今后,在两个相同指标下加一横线表示不必按求和的约定取和。例如,$g_{\overline{ii}}$ 表示度量张量的第 i 个协变对角分量,而不是三个对角分量之和。

式(3.6.23a)的变换系数矩阵为

$$[\beta^{j}_{(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \end{bmatrix} \tag{3.6.23b}$$

与 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 对偶的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 可由对偶关系

$$\boldsymbol{g}_{(i)} \cdot \boldsymbol{g}^{(j)} = \delta^{(j)}_{(i)}$$

得到。由式(3.6.23b) 和上式知

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{g}^{i} = \beta^{(i)}_{j}\boldsymbol{g}^{j} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{3.6.24}$$

$$\beta^{(i)}_{j} = \begin{cases} 0 & \text{当 } i \neq j \\ \sqrt{g_{ii}} & \text{当 } i = j \end{cases} \tag{3.6.25a}$$

式(3.6.25a) 的变换系数矩阵为

$$[\beta^{(i)}_{j}] = \begin{bmatrix} \sqrt{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{g_{33}} \end{bmatrix} \tag{3.6.25b}$$

对于任意曲线坐标系,一般说按上述方法选择的非完整系的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 是一组互不正交的无量纲单位矢量。逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 也是无量纲的,但它既不正交也不是单位矢量。

对于一个任意的矢量 $\boldsymbol{v}$,它在完整系中的分解式为

$$\boldsymbol{v} = v^{i}\boldsymbol{g}_{i} = v_{i}\boldsymbol{g}^{i}$$

其中分量 v^{i} 或 v_{i} 一般不具有该物理量原来的量纲。但如果该矢量对上述非完整系分解为

$$\boldsymbol{v} = v^{(i)}\boldsymbol{g}_{(i)} = v_{(i)}\boldsymbol{g}^{(i)}$$

那么由于 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 和 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 都是无量纲的,所以分量 $v^{(i)}$ 和 $v_{(i)}$ 均具有矢量 $\boldsymbol{v}$ 原来的物理量纲。如果按物理学中的平行四边形法则,把矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿非完整系基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 和 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 的方向分解,则 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 方向分量的大小就等于逆变分量 $v^{(i)}$。而 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 方向分量的大小并不等于协变分量 $v_{(i)}$,因为 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 不是单位矢量。故通常把非完整系逆变分量 $v^{(i)}$ 选作矢量 $\boldsymbol{v}$ 的**物理分量**。把式(3.6.25a) 代入式(3.6.17),就得到物理分量 $v^{(i)}$ 和完整系分量 v^{i} 间的转换关系

$$v^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}v^{i} = \sqrt{g_{ii}}g^{ij}v_{j}$$

$$v^{i} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}v^{(i)} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{3.6.26}$$

对于一个二阶张量 $\boldsymbol{T}$,它在完整系中可以分解为

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j} = T_{ij}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j} = T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} = T_{i}^{\cdot j}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}_{j}$$

一般来说上述完整系分量并不具有原物理量纲。如果把同一张量实体对非完整系分解为

$$\boldsymbol{T} = T^{(i)(j)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)} = T_{(i)(j)}\boldsymbol{g}^{(i)}\boldsymbol{g}^{(j)} = T^{(i)}_{\cdot(j)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}^{(j)} = T_{(i)}^{\cdot(j)}\boldsymbol{g}^{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}$$

则上述四种非完整系逆变、协变和混变分量都具有原来的物理量纲。究竟选哪种分量作为物理分量应根据具体物理问题来定。

以应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为例,由例 1.9 知,在变形体内任意点处,作用在外法线矢量为 $\boldsymbol{n}$ 的斜截面上的应力矢量 $\boldsymbol{P}$ 与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间满足张量方程

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.6.27}$$

前面已经选定矢量的物理分量为其逆变分量，所以

$$\boldsymbol{P} = P^{(i)} \boldsymbol{g}_{(i)}$$

$$\boldsymbol{n} = n^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)}$$

如果相应地把张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 分解成

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{(i)}_{\cdot(j)} \boldsymbol{g}_{(i)} \boldsymbol{g}^{(j)}$$

把上面 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}$ 的表达式代入式(3.6.27)，得

$$\begin{aligned} P^{(i)} \boldsymbol{g}_{(i)} &= \sigma^{(i)}_{\cdot(j)} \boldsymbol{g}_{(i)} \boldsymbol{g}^{(j)} \cdot n^{(k)} \boldsymbol{g}_{(k)} = \sigma^{(i)}_{\cdot(j)} n^{(k)} \delta^{(j)}_{(k)} \boldsymbol{g}_{(i)} \\ &= \sigma^{(i)}_{\cdot(j)} n^{(j)} \boldsymbol{g}_{(i)} \end{aligned}$$

所以物理分量之间的关系为

$$P^{(i)} = \sigma^{(i)}_{\cdot(j)} n^{(j)} \tag{3.6.28}$$

它在完整系中的关系式为

$$P^{i} = \sigma^{i}_{\cdot j} n^{j} \tag{3.6.29}$$

完全相似。所以当二阶张量与右边某矢量相点积时，选取混变分量 $T^{(i)}_{\cdot(j)}$ 作为物理分量是比较合理的。

将式(3.6.23a)和式(3.6.25a)代入式(3.6.19)，就可得到物理分量与完整系分量之间的转换关系为

$$T^{(k)}_{\cdot(l)} = \beta^{(k)}_{k} \beta^{l}_{(l)} T^{k}_{\cdot l} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ll}}} T^{k}_{\cdot l} \quad (\text{对 } k, l \text{ 不求和}) \tag{3.6.30a}$$

$$T^{k}_{\cdot l} = \beta^{k}_{(k)} \beta^{(l)}_{l} T^{(k)}_{\cdot(l)} = \sqrt{\frac{g_{ll}}{g_{kk}}} T^{(k)}_{\cdot(l)} \quad (\text{对 } k, l \text{ 不求和}) \tag{3.6.30b}$$

3.7 正交曲线坐标系中的物理分量

在对许多物理、力学问题进行研究时常采用正交曲线坐标系，此时前面所述的公式就可以得到简化。

3.7.1 正交标准化基

所谓正交曲线坐标系就是三个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 互相正交，即满足条件

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = 0 \quad (i \neq j) \tag{3.7.1}$$

但它们不一定是单位矢量。为此我们将基矢量单位化，令

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \sqrt{\frac{1}{g_{ii}}} \boldsymbol{g}_i \quad (\text{对 } i \text{ 不求和})$$

则 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 就是一组标准正交基。我们把由 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 构成的标架称为**物理标架**。显然只有由正交直线坐标系(特别是正交笛卡尔坐标系)所得的物理标架是完整的以外，其他的正交曲线坐标系都是非完整标架。

物理标架在空间的每一点处确定了一组标准正交基，因此在每一点处所定义的张量都

可成为笛卡尔张量,从而物理分量、基矢量和并基可一律采用下标。这样,任意阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在物理标架下的并基展开式可写为

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{(ij\cdots k)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}\cdots\boldsymbol{g}_{(k)} \tag{3.7.2}$$

其中 $\phi_{(ij\cdots k)}$ 就是张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的物理分量。

3.7.2 基矢量对坐标的导数(Christoffel 符号)

由于正交曲线坐标系的度量张量 $g_{ij} = 0(i \neq j)$,因此它的克氏符号将得到简化。我们引入

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{g_{11}} \\ H_2 &= \sqrt{g_{22}} \\ H_3 &= \sqrt{g_{33}} \end{aligned} \tag{3.7.3}$$

通常把 H_1, H_2, H_3 称为**拉梅(Lam'e)系数**。于是,克氏符号就可用拉梅系数来表示。

由式(3.2.7a)

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})$$

可以得到第一类克氏符号

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ijk} = 0 && (i,j,k\text{ 互不相等}) \\ &\Gamma_{iij} = -\frac{1}{2}g_{ii,j} = -\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,j} && (i \neq j,\text{对 } i \text{ 不求和}) \\ &\Gamma_{iji} = \Gamma_{jii} = \frac{1}{2}g_{ii,j} = \frac{1}{2}(H_iH_i)_{,j} && (\text{对 } i \text{ 不求和}) \end{aligned} \tag{3.7.4}$$

同理,由式(3.2.7b)

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2}g^{lk}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k})$$

可以得到第二类克氏符号,并注意到

$$\begin{aligned} &g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \\ &\Gamma_{ij}^{k} = 0 && (i,j,k\text{ 互不相等}) \\ &\Gamma_{ii}^{j} = -\frac{1}{2g_{jj}}g_{ii,j} = -\frac{1}{2H_jH_j}(H_iH_i)_{,j} && (i \neq j,\text{对 } i \text{ 不求和}) \\ &\Gamma_{ij}^{i} = \Gamma_{ji}^{i} = \frac{1}{2g_{ii}}g_{ii,j} = \frac{1}{2H_iH_i}(H_iH_i)_{,j} && (\text{对 } i \text{ 不求和}) \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

对应的物理标架与完整标架之间的关系为

$$\boldsymbol{g}_1 = H_1\boldsymbol{g}_{(1)}, \quad \boldsymbol{g}_2 = H_2\boldsymbol{g}_{(2)}, \quad \boldsymbol{g}_3 = H_3\boldsymbol{g}_{(3)} \tag{3.7.6a}$$

$$\boldsymbol{g}^1 = \frac{1}{H_1}\boldsymbol{g}_{(1)}, \quad \boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{H_2}\boldsymbol{g}_{(2)}, \quad \boldsymbol{g}^3 = \frac{1}{H_3}\boldsymbol{g}_{(3)} \tag{3.7.6b}$$

3.7.3 不变性微分算子的物理分量

1.标量场

设有一标量场

$$f = f(x^1, x^2, x^3)$$

它的梯度是

$$\mathbf{grad}\, f = \nabla_s f \boldsymbol{g}^s = f_{,s}\boldsymbol{g}^s$$

把式(3.7.6b)代入即得

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{1}{H_s} f_{,s} \boldsymbol{g}_{(s)} = \frac{1}{H_1} f_{,1} \boldsymbol{g}_{(1)} + \frac{1}{H_2} f_{,2} \boldsymbol{g}_{(2)} + \frac{1}{H_3} f_{,3} \boldsymbol{g}_{(3)} \tag{3.7.7a}$$

由上式知,标量 f 的梯度 $\mathbf{grad}\, f$(矢量)的物理分量为

$$(\mathbf{grad}\, f)_{(1)} = \frac{1}{H_1} f_{,1}$$

$$(\mathbf{grad}\, f)_{(2)} = \frac{1}{H_2} f_{,2}$$

$$(\mathbf{grad}\, f)_{(3)} = \frac{1}{H_3} f_{,3} \tag{3.7.7b}$$

它的拉普拉斯算子由式(3.4.17)给出,即

$$\nabla^2 f = g^{ls}(f_{,ls} - \Gamma^r_{ls} \partial_r f)$$

考虑到在正交系中 $g^{ls} = 0$(当 $l \neq s$),所以

$$\nabla^2 f = \frac{1}{g_{11}}(f_{,11} - \Gamma^r_{11} f_{,r}) + \frac{1}{g_{22}}(f_{,22} - \Gamma^r_{22} f_{,r}) + \frac{1}{g_{33}}(f_{,33} - \Gamma^r_{33} f_{,r})$$

把式(3.7.3)和式(3.7.5)代入,先看上式右端第一项

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{11}}(f_{,11} - \Gamma^r_{11} f_{,r}) &= \frac{1}{g_{11}}(f_{,11} - \Gamma^1_{11} f_{,1} - \Gamma^2_{11} f_{,2} - \Gamma^3_{11} f_{,3}) \\
&= \frac{1}{H_1 H_1}\Big[f_{,11} - \frac{1}{2H_1 H_1}(H_1 H_1)_{,1} f_{,1} + \frac{1}{2H_2 H_2}(H_1 H_1)_{,2} f_{,2} \\
&\quad + \frac{1}{2H_3 H_3}(H_1 H_1)_{,3} f_{,3}\Big] \\
&= \frac{1}{H_1 H_1}\left(f_{,11} - \frac{2H_1 H_{1,1}}{2H_1 H_1} f_{,1} + \frac{2H_1 H_{1,2}}{2H_2 H_2} f_{,2} + \frac{2H_1 H_{1,3}}{2H_3 H_3} f_{,3}\right) \\
&= \frac{1}{H_1 H_1}\left(f_{,11} - \frac{H_{1,1}}{H_1} f_{,1} + \frac{H_1 H_{1,2}}{H_2 H_2} f_{,2} + \frac{H_1 H_{1,3}}{H_3 H_3} f_{,3}\right)
\end{aligned}$$

同理,右端第二项

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_{22}}(f_{,22} - \Gamma^r_{22} f_{,r}) &= \frac{1}{g_{22}}(f_{,22} - \Gamma^1_{22} f_{,1} - \Gamma^2_{22} f_{,2} - \Gamma^3_{22} f_{,3}) \\
&= \frac{1}{H_2 H_2}\Big[f_{,22} + \frac{1}{2H_1 H_1}(H_2 H_2)_{,1} f_{,1} - \frac{1}{2H_2 H_2}(H_2 H_2)_{,2} f_{,2} \\
&\quad + \frac{1}{2H_3 H_3}(H_2 H_2)_{,3} f_{,3}\Big] \\
&= \frac{1}{H_2 H_2}\left(f_{,22} + \frac{2H_2 H_{2,1}}{2H_1 H_1} f_{,1} - \frac{2H_2 H_{2,2}}{2H_2 H_2} f_{,2} + \frac{2H_2 H_{2,3}}{2H_3 H_3} f_{,3}\right) \\
&= \frac{1}{H_2 H_2}\left(f_{,22} + \frac{H_2 H_{2,1}}{H_1 H_1} f_{,1} - \frac{H_{2,2}}{H_2} f_{,2} + \frac{H_2 H_{2,3}}{H_3 H_3} f_{,3}\right)
\end{aligned}$$

而右端第三项

$$\frac{1}{g_{33}}(f_{,33} - \Gamma^r_{33} f_{,r}) = \frac{1}{g_{33}}(f_{,33} - \Gamma^1_{33} f_{,1} - \Gamma^2_{33} f_{,2} - \Gamma^3_{33} f_{,3})$$

$$= \frac{1}{H_3 H_3}\left(f_{,33} + \frac{H_3 H_{3,1}}{H_1 H_1} f_{,1} + \frac{H_3 H_{3,2}}{H_2 H_2} f_{,2} - \frac{H_{3,3}}{H_3} f_{,3}\right)$$

最后经整理简化后得

$$\nabla^2 f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} f_{,1}\right)_{,1} + \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} f_{,2}\right)_{,2} + \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} f_{,3}\right)_{,3}\right] \tag{3.7.8}$$

2.矢量场

设矢量场

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{g}^i = a^i \boldsymbol{g}_i = a_{(i)} \boldsymbol{g}_{(i)}$$

由式(3.7.6b)有

$$a_i = H_i a_{(i)} \tag{3.7.9}$$

它的梯度由式(3.3.15b)知

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla_s a_i \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}^i = (\partial_s a_i - \Gamma_{si}^k a_k) \boldsymbol{g}^s \boldsymbol{g}^i$$

把式(3.7.5)、式(3.7.6b)和式(3.7.9)代入上式,就可以得到矢量场梯度的物理分量。现在我们来计算其中一项,如$(\nabla \boldsymbol{a})_{(11)}$,因为

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{11} \boldsymbol{g}^1 \boldsymbol{g}^1 = \nabla_1 a_1 \boldsymbol{g}^1 \boldsymbol{g}^1 = (\partial_1 a_1 - \Gamma_{11}^k a_k) \boldsymbol{g}^1 \boldsymbol{g}^1$$

所以

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(11)} = [\partial_1 (H_1 a_{(1)}) - \Gamma_{11}^1 H_1 a_{(1)} - \Gamma_{11}^2 H_2 a_{(2)} - \Gamma_{11}^3 H_3 a_{(3)}] \frac{1}{H_1 H_1}$$

$$= \frac{1}{H_1 H_1}\Big[H_1 \partial_1 a_{(1)} + H_{1,1} a_{(1)} - \frac{1}{2H_1 H_1}(H_1 H_1)_{,1} H_1 a_{(1)} + \frac{1}{2H_2 H_2}(H_1 H_1)_{,2} H_2 a_{(2)}$$

$$+ \frac{1}{2H_3 H_3}(H_1 H_1)_{,3} H_3 a_{(3)}\Big]$$

$$= \frac{1}{H_1 H_1}\left[H_1 \partial_1 a_{(1)} + H_{1,1} a_{(1)} - \frac{2H_1 H_{1,1}}{2H_1 H_1} H_1 a_{(1)} + \frac{2H_1 H_{1,2}}{2H_2 H_2} H_2 a_{(2)} + \frac{2H_1 H_{1,3}}{2H_3 H_3} H_3 a_{(3)}\right]$$

$$= \frac{1}{H_1 H_1}\left[H_1 \partial_1 a_{(1)} + H_{1,1} a_{(1)} - H_{1,1} a_{(1)} + \frac{H_1 H_{1,2}}{H_2} a_{(2)} + \frac{H_1 H_{1,3}}{H_3} a_{(3)}\right]$$

$$= \frac{1}{H_1 H_1}\left[H_1 \partial_1 a_{(1)} + \frac{H_1 H_{1,2}}{H_2} a_{(2)} + \frac{H_1 H_{1,3}}{H_3} a_{(3)}\right]$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}[H_2 H_3 \partial_1 a_{(1)} + H_3 H_{1,2} a_{(2)} + H_2 H_{1,3} a_{(3)}]$$

用同样的方法,我们可以得到其他 8 个分量

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(22)} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}[H_3 H_1 \partial_2 a_{(2)} + H_1 H_{2,3} a_{(3)} + H_3 H_{2,1} a_{(1)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(33)} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}[H_1 H_2 \partial_3 a_{(3)} + H_2 H_{3,1} a_{(1)} + H_1 H_{3,2} a_{(2)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(12)} = \frac{1}{H_1 H_2}[H_2 \partial_1 a_{(2)} - H_{1,2} a_{(1)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{21} = \frac{1}{H_1 H_2}[H_1 \partial_2 a_{(1)} - H_{2,1} a_{(2)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{13} = \frac{1}{H_1 H_3}[H_3 \partial_1 a_{(3)} - H_{1,3} a_{(1)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{31} = \frac{1}{H_1 H_3}[H_1 \partial_3 a_{(1)} - H_{3,1} a_{(3)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{23} = \frac{1}{H_2 H_3}[H_3 \partial_2 a_{(3)} - H_{2,3} a_{(2)}]$$

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{32} = \frac{1}{H_2 H_3}[H_2 \partial_3 a_{(2)} - H_{3,2} a_{(3)}] \tag{3.7.10}$$

求出了矢量 $\boldsymbol{a}$ 的梯度 $\nabla \boldsymbol{a}$ 的物理分量后，再求 $\boldsymbol{a}$ 的散度和旋度就方便了。因为 $\boldsymbol{a}$ 的散度就是式(3.7.10) 前面 3 个分量之和，即

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{a} &= (\nabla \boldsymbol{a})_{(11)} + (\nabla \boldsymbol{a})_{22} + (\nabla \boldsymbol{a})_{33} \\
&= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}[H_2 H_3 \partial_1 a_{(1)} + H_3 H_{2,1} a_{(1)} + H_2 H_{3,1} a_{(1)} + H_3 H_1 \partial_2 a_{(2)} + H_3 H_{1,2} a_{(2)} \\
&\quad + H_1 H_{3,2} a_{(2)} + H_1 H_2 \partial_3 a_{(3)} + H_1 H_{2,3} a_{(3)} + H_2 H_{1,3} a_{(3)}] \\
&= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}[\partial_1(H_2 H_3 a_{(1)}) + \partial_2(H_3 H_1 a_{(2)}) + \partial_3(H_1 H_2 a_{(3)})]
\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度的物理分量也可由式(3.7.10) 中的量构成。由 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}$ 的定义可知，该矢量在 $\boldsymbol{g}_{(1)}, \boldsymbol{g}_{(2)}, \boldsymbol{g}_{(3)}$ 方向的分量分别为

$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(23)} - (\nabla \boldsymbol{a})_{(32)}$$
$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(31)} - (\nabla \boldsymbol{a})_{(13)}$$
$$(\nabla \boldsymbol{a})_{(12)} - (\nabla \boldsymbol{a})_{(21)}$$

所以有

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(1)} = \frac{1}{H_2 H_3}[(H_3 a_{(3)})_{,2} - (H_2 a_{(2)})_{,3}]$$

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(2)} = \frac{1}{H_3 H_1}[(H_1 a_{(1)})_{,3} - (H_3 a_{(3)})_{,1}]$$

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(3)} = \frac{1}{H_1 H_2}[(H_2 a_{(2)})_{,1} - (H_1 a_{(1)})_{,2}] \tag{3.7.12a}$$

当然也可以写成以下的矢量形式

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1 \boldsymbol{g}_{(1)} & H_2 \boldsymbol{g}_{(2)} & H_3 \boldsymbol{g}_{(3)} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ H_1 a_{(1)} & H_2 a_{(2)} & H_3 a_{(3)} \end{vmatrix} \tag{3.7.12b}$$

其实上式也完全可以由式(3.4.8) 直接得到。

当拉普拉斯算子作用于矢量 $\boldsymbol{a}$ 时，得到一个新矢量，它的物理分量相当繁复。一般我们采用下述公式计算比较方便

$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \mathbf{grad}\ (\operatorname{div} \boldsymbol{a}) - \mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) \tag{3.7.13}$$

上式是张量公式，故只需在正交笛卡尔坐标系下证明它成立即可。

在笛卡尔坐标系中，因为

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}) &= \mathbf{rot}\ (\varepsilon_{kpq} a_{q,p} \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kpq} a_{q,p})_{,j} \boldsymbol{e}_i \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} a_{q,pj} \boldsymbol{e}_i = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kpq} a_{q,pj} \boldsymbol{e}_i \\
&= (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) a_{q,pj} \boldsymbol{e}_i = (a_{j,ij} - a_{i,jj}) \boldsymbol{e}_i \\
&= (a_{j,j})_{,i} \boldsymbol{e}_i - (a_i \boldsymbol{e}_i)_{,jj} = \mathbf{grad}\ (\operatorname{div} \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

所以证得式(3.7.13)

$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}) - \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})$$

式(3.7.13) 的右端各项计算已无困难,但需具体写出用 $a_{(i)}$ 和拉梅系数表示的展开式还是相当麻烦的。我们将在下一节中对特定的物理标架导出其具体表达式。

3.二阶张量场

对于二阶张量场,我们着重介绍它的散度的物理分量的具体展开式,这在实用中是比较常见的。设有二阶张量场

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = \phi_{(ij)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}$$

由式(3.7.6b) 可得

$$\phi_{ij} = H_iH_j\phi_{(ij)} \tag{3.7.14}$$

它的梯度为

$$\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\Phi} = \nabla_s\phi_{ij}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = (\phi_{ij,s} - \Gamma^r_{si}\phi_{rj} - \Gamma^r_{sj}\phi_{ir})\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$$

将式(3.7.6) 和式(3.7.14) 代人上式就得

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\ \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{H_sH_iH_j}[&(H_iH_j\phi_{(ij)})_{,s} - \Gamma^r_{si}H_rH_j\phi_{(rj)} \\ &- \Gamma^r_{sj}H_iH_r\phi_{(ir)}]\boldsymbol{g}_{(s)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}\end{aligned} \tag{3.7.15}$$

它是个三阶张量,由上式就可以给出 27 个物理分量。

$\boldsymbol{\Phi}$ 的散度就是式(3.7.15) 中第一个指标 s 和第二个指标 i 缩并的结果,故有

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{\Phi} = \nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{H_iH_iH_j}[(H_iH_j\phi_{(ij)})_{,i} - \Gamma^r_{ii}H_rH_j\phi_{(rj)} - \Gamma^r_{ij}H_iH_r\phi_{(ir)}]\boldsymbol{g}_{(j)} \tag{3.7.16}$$

上式给出了 div $\boldsymbol{\Phi}$ 的3个物理分量。对每一个物理分量即 j 取定一个数,i 和 r 都是哑指标,全部展开将有 27 项之多。具体的讨论我们将在下节中进行。

3.8 常用的物理标架

常用的正交坐标系有笛卡尔坐标系、圆柱坐标系(平面问题中的极坐标系是其特例) 和球坐标系。本节讨论上节中给出的物理分量公式在这些正交坐标系中的具体表达式。

3.8.1 正交笛卡尔坐标系

由正交笛卡尔坐标系得到的物理标架是完整标架,它是最常用、最简单,也是最重要的一种物理标架。我们常常在笛卡尔标架中推导出张量方程,然后写成不变性记法,这样就可适用于所有的坐标系了。

由于笛卡尔标架本身是完整的,因此所有物理分量的指标均可去掉圆括号,单位正交基仍用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 表示,在此标架下有

$$x = x^1 = x_1$$
$$y = x^2 = x_2$$
$$z = x^3 = x_3$$

而且

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ijk} = 0 \qquad (对所有\ i,j,k) \tag{3.8.1}$$

由于克氏符号处处为零，因此协变导数与普通偏导数一致，因而Hamilton算子∇和拉普拉斯算子∇^2作用于任何阶张量时，都只具有一种表达式，即

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.8.2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.8.3}$$

对于标量场$f(x_i)$，它的梯度和拉普拉斯算子为

$$\textbf{grad}\ f = \nabla f = f_{,i}\boldsymbol{e}_i \tag{3.8.4}$$

$$\nabla^2 f = f_{,ii} \tag{3.8.5}$$

对于矢量场$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$，它的四种不变性微分算子为

$$\textbf{grad}\ \boldsymbol{a} = \nabla \boldsymbol{a} = a_{j,i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{3.8.6}$$

$$\text{div}\ \boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = a_{i,i} \tag{3.8.7}$$

$$\textbf{rot}\ \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \varepsilon_{ijk}a_{k,j}\boldsymbol{e}_i \tag{3.8.8}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \text{div}\ (\textbf{grad}\ \boldsymbol{a}) = a_{j,ii}\boldsymbol{e}_j \tag{3.8.9}$$

对于二阶张量场$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，它的散度为

$$\text{div}\ \boldsymbol{\Phi} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Phi} = \phi_{ij,i}\boldsymbol{e}_j \tag{3.8.10}$$

在连续介质力学中，这些公式都是常常要用到的。

3.8.2　圆柱坐标系

在此坐标系中，我们仍记

$$r = x^1, \theta = x^2, z = x^3$$

如图 3－1 所示。

由第一章习题一中 1.5 的答案知，在圆柱坐标系中，协变基矢量为

$$\boldsymbol{g}_1 = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为笛卡尔坐标系中的 3 个单位矢量。因此

$$H_1 = \sqrt{\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2} = \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = r$$

$$H_3 = \sqrt{\boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3} = 1 \tag{3.8.11}$$

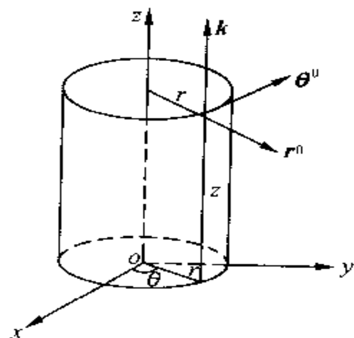


图 3－1　圆柱坐标系

根据 Γ 氏符号的计算公式(3.2.4)可知

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = r, \Gamma_{221} = -r$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -r, \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{r} \tag{3.8.12}$$

其余未列出的克氏符号全为零(除对称指标外)。并记物理标架为

$$\boldsymbol{g}_{(1)} = \boldsymbol{r}^0$$

$$\boldsymbol{g}_{(2)} = \boldsymbol{\theta}^0$$
$$\boldsymbol{g}_{(3)} = \boldsymbol{k} \tag{3.8.13}$$

1.标量场

对于标量场 $f = f(x^i) = f(r, \theta, z)$

其梯度可由式(3.7.7a)得

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\, f &= \frac{1}{H_1} f_{,1} \boldsymbol{g}_{(1)} + \frac{1}{H_2} f_{,2} \boldsymbol{g}_{(2)} + \frac{1}{H_3} f_{,3} \boldsymbol{g}_{(3)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta}^0 + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{3.8.14}$$

其拉普拉斯算子由式(3.7.8)得

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} f_{,1} \right)_{,1} + \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} f_{,2} \right)_{,2} + \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} f_{,3} \right)_{,3} \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{,r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{,\theta} + \left(r \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{,z} \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial f}{\partial r} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

2.矢量场

对于矢量场 $\boldsymbol{a} = a_{(i)} \boldsymbol{g}_{(i)} = a_r \boldsymbol{r}^0 + a_\theta \boldsymbol{\theta}^0 + a_z \boldsymbol{k}$

其梯度 $\nabla \boldsymbol{a}$ 的9个物理分量可由式(3.7.10)得

$$\begin{aligned}(\nabla \boldsymbol{a})_{(11)} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(22)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_r \right) \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(33)} &= \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(12)} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(21)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - a_\theta \right) \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(13)} &= \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(31)} &= \frac{\partial a_r}{\partial z} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(23)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{(32)} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\end{aligned} \tag{3.8.16}$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度可由式(3.7.11)得

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} a_r + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{3.8.17}$$

它实际上就是式(3.8.16)的前三项之和。矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的旋度的3个物理分量由式(3.7.12a)得

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(1)} = \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}$$

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(2)} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}$$

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(3)} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \tag{3.8.18}$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的拉普拉斯算子可按公式(3.7.13)算出。因为

$$\nabla^2\boldsymbol{a} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

它的右端第一项为($\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{a}$ 由式(3.8.17)给出)

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) &= \left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{\theta}^0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\left(\frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 a_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}a_r - \frac{1}{r^2}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial r\partial\theta} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial r\partial z}\right)\boldsymbol{r}^0\\ &\quad + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_r}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_z}{\partial\theta\partial z}\right)\boldsymbol{\theta}^0\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 a_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial\theta\partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

而它的右端第二项即为 $\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})$,所以可以把式(3.8.18)代入式(3.7.12b)

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}) &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{r}^0 & r\boldsymbol{\theta}^0 & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(1)} & r(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(2)} & (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(3)}\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_r}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial r}\right)\boldsymbol{r}^0\\ &\quad + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_z}{\partial z\partial\theta} - \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 a_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}a_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{\theta}^0\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 a_r}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 a_z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 a_\theta}{\partial\theta\partial z}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

把这两项代入式(3.7.13),就可得到 $\nabla^2\boldsymbol{a}$ 的3个物理分量

$$(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(1)} = \Delta a_r - \frac{1}{r^2}a_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(2)} = \Delta a_\theta - \frac{1}{r^2}a_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(3)} = \Delta a_z \tag{3.8.19}$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.8.20}$$

它就是作用于标量的拉普拉斯算子。

3.二阶张量场

设二阶张量场

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi_{(ij)} \boldsymbol{g}_{(i)} \boldsymbol{g}_{(j)} = \phi_{rr} \boldsymbol{r}^0 \boldsymbol{r}^0 + \phi_{r\theta} \boldsymbol{r}^0 \boldsymbol{\theta}^0 + \phi_{rz} \boldsymbol{r}^0 \boldsymbol{k} + \phi_{\theta r} \boldsymbol{\theta}^0 \boldsymbol{r}^0 + \phi_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta}^0 \boldsymbol{\theta}^0 + \phi_{\theta z} \boldsymbol{\theta}^0 \boldsymbol{k} + \phi_{zr} \boldsymbol{k} \boldsymbol{r}^0 + \phi_{z\theta} \boldsymbol{k} \boldsymbol{\theta}^0 + \phi_{zz} \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}$$

其散度可按式(3.7.16),把拉梅系数和第二类克氏符号直接代入,即得 $\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi}$ 的 3 个物理分量

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi})_{(1)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r\phi_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_{zr}}{\partial z} - \frac{\phi_{\theta\theta}}{r} \\
(\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi})_{(2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r\phi_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\phi_{\theta r}}{r} \\
(\nabla \cdot \boldsymbol{\Phi})_{(3)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r\phi_{rz})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.8.21}$$

3.8.3 球坐标系

在此坐标系中,我们记

$$r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$$

如图 3-2 所示。

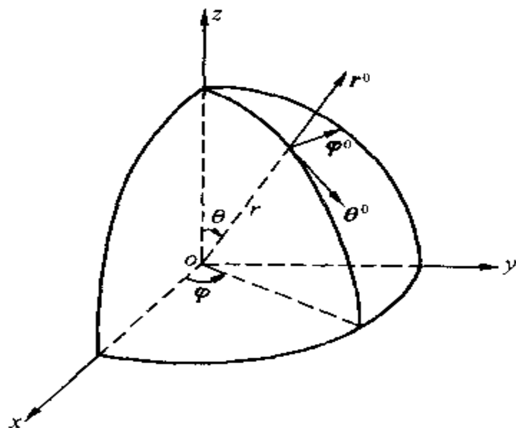


图 3-2 球坐标系

由第一章习题一中 1.5 的答案知,在球坐标系中,协变基矢量为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1 &= \sin\theta\cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi \boldsymbol{j} + \cos\theta \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{g}_2 &= r\cos\theta\cos\varphi \boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi \boldsymbol{j} - r\sin\theta \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{g}_3 &= -r\sin\theta\sin\varphi \boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi \boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为笛卡尔坐标系中的 3 个单位矢量。因此

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sqrt{\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1 \\
H_2 &= \sqrt{\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r \\
H_3 &= \sqrt{\boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3} = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta
\end{aligned} \tag{3.8.22}$$

根据 Γ 氏符号的计算公式(3.2.4)可知

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{122} = r, \quad && \Gamma_{133} = r\sin^2\theta, \quad && \Gamma_{233} = r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\Gamma_{221} = -r, && \Gamma_{331} = -r\sin^2\theta, && \Gamma_{332} = -r^2\sin\theta\cos\theta \\
&\Gamma_{22}^1 = -r, && \Gamma_{33}^1 = -r\sin^2\theta, && \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta \\
&\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, && && \Gamma_{23}^3 = \cot\theta
\end{aligned} \tag{3.8.23}$$

其余未列出的克氏符号全为零(除对称指标外)。并记物理标架为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_{(1)} &= \boldsymbol{r}^0 \\
\boldsymbol{g}_{(2)} &= \boldsymbol{\theta}^0 \\
\boldsymbol{g}_{(3)} &= \boldsymbol{\varphi}^0
\end{aligned} \tag{3.8.24}$$

1.标量场

设标量场为 $f = f(x^i) = f(r,\theta,\varphi)$

其梯度可由式(3.7.7a)得

$$\textbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}^0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{\varphi}^0 \tag{3.8.25}$$

其拉普拉斯算子由式(3.7.8)得

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{3.8.26}$$

2.矢量场

对于矢量场 $\boldsymbol{a} = a_{(i)}\boldsymbol{g}_{(i)} = a_r\boldsymbol{r}^0 + a_\theta\boldsymbol{\theta}^0 + a_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0$

其梯度 $\nabla\boldsymbol{a}$ 的 9 个物理分量可由式(3.7.10)得

$$\begin{aligned}
(\nabla\boldsymbol{a})_{11} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(22)} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} + a_r\right) \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(33)} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}a_r + \frac{\cot\theta}{r}a_\theta \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(12)} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(21)} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - a_\theta\right) \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(13)} &= \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(31)} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}a_\varphi \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(23)} &= \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} \\
(\nabla\boldsymbol{a})_{(32)} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot\theta}{r}a_\varphi
\end{aligned} \tag{3.8.27}$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度可由式(3.7.11)得

$$\text{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \tag{3.8.28}$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的旋度的 3 个物理分量为

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(1)} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \\
(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(2)} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r} \\
(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_{(3)} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{3.8.29}
$$

矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的拉普拉斯算子可按式(3.7.13) 算得它的 3 个物理分量为

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(1)} &= \Delta a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \\
(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(2)} &= \Delta a_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} - \frac{a_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} \\
(\nabla^2\boldsymbol{a})_{(3)} &= \Delta a_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} - \frac{a_\varphi}{r^2\sin^2\theta}
\end{aligned}
\tag{3.8.30}
$$

其中

$$
\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\tag{3.8.31}
$$

它就是作用于标量的拉普拉斯算子。

3.二阶张量场

设二阶张量场

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T} = T_{(ij)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)} = {} & T_{rr}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{r}^0 + T_{r\theta}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\theta}^0 + T_{r\varphi}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\varphi}^0 + T_{\theta r}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{r}^0 + T_{\theta\theta}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\theta}^0 + T_{\theta\varphi}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\varphi}^0 + \\
& T_{\varphi r}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{r}^0 + T_{\varphi\theta}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\theta}^0 + T_{\varphi\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\varphi}^0
\end{aligned}
$$

其散度可按式(3.7.16) 得

$$
\begin{aligned}
(\nabla\cdot\boldsymbol{T})_{(1)} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta T_{\theta r})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial\varphi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\varphi\varphi}}{r} \\
(\nabla\cdot\boldsymbol{T})_{(2)} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2T_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta T_{\theta\theta})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial\varphi} + \frac{T_{\theta r} - \cot\theta T_{\varphi\varphi}}{r} \\
(\nabla\cdot\boldsymbol{T})_{(3)} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2T_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta T_{\theta\varphi})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} - \frac{T_{\varphi r} + \cot\theta T_{\varphi\theta}}{r}
\end{aligned}
\tag{3.8.32}
$$

*3.9 积分定理

3.9.1 预备知识

1.若用矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 来表示封闭曲面a 的面素,则 $|\mathrm{d}\boldsymbol{a}|$ 等于该面素的面积,而 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的方向为面素的外法线方向,则沿此封闭曲面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的积分为零

$$
\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0
\tag{3.9.1}
$$

上式可以这样证明:任取一个平面如图 3 - 3 所示,其法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{k}$,面素 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$

在平面上的投影为

$$\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

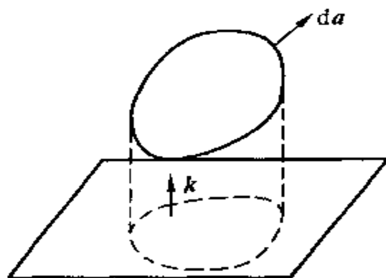


图 3－3　封闭曲面的面元矢量

显然，此投影沿整个封闭曲面的总和(代数和)应为零，即

$$\oint_a \boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=0$$

而 $\boldsymbol{k}$ 是常矢量，故

$$\oint_a \boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}\cdot\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}=0$$

又由于 $\boldsymbol{k}$ 的任意性，所以必有

$$\oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}=0$$

2.

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^l)=(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^l)_{,l}=\boldsymbol{0} \tag{3.9.2}$$

上式可以这样证明：由式(3.2.11)和式(3.2.12)有

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^l)=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l+\sqrt{g}\frac{\partial \boldsymbol{g}^l}{\partial x^l}=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l-\sqrt{g}\Gamma^l_{lk}\boldsymbol{g}^k$$

$$=\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l-\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}\boldsymbol{g}^k=\boldsymbol{0}$$

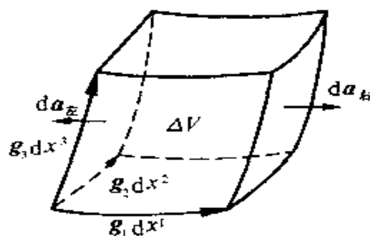


图 3－4　曲面微元体

式(3.9.2)的几何意义可以这样解释：

考虑一表面为 $\Delta\boldsymbol{a}$ 的曲面微元体 ΔV，$\Delta\boldsymbol{a}$ 由长度分别为 $\mathrm{d}x^l$ 的三对坐标曲面构成，如图 3－4 所示，将左侧面的大小方位用矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{左}$ 表示，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{左}$ 的方向沿左侧面的外法线，而大小正比于左侧面面积，同样用 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{右}$ 表示右侧面，则由式(1.9.1a′)可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{左}=-\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2\times\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3=-\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{右}=\left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1+\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1)\mathrm{d}x^1\right]\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

类似地，我们还可以写出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{下}=-\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1\times\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2=-\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{上}=\left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3)\mathrm{d}x^3\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{前}=-\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3\times\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1=-\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^1$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{后}=\left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2)\mathrm{d}x^2\right]\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^1$$

故此曲面微元体的面素 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 之和为

$$\sum_{\Delta a}\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3)\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^l)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{3.9.3}$$

而式(3.9.1)已经证明$\sum d\boldsymbol{a}=0$,于是得到式(3.9.2)。该式的几何意义实质上与式(3.9.1)是相同的,即封闭区域的面积矢量之和为零。

也可以这样理解式(3.9.1)和式(3.9.2)的物理意义,设一个表面为a的封闭容器受均匀分布的内压强p,则该容器所受的力的主矢量必为零,即

$$\oint_a p\,d\boldsymbol{a}=0$$

消去非零常数p后就得到式(3.9.1)。若此容器的表面由三对长度分别为dx^l($l=1,2,3$)的坐标曲面构成,则

$$p\sum d\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

消去因子$p\,dx^1x^2x^3$后就可得式(3.9.2)。

3.9.2 Green 变换公式

Green 变换公式给出了张量函数的体积分与封闭域的面积分的变换公式。

若在三维空间的体域V上定义有n阶张量场函数$\boldsymbol{\Phi}$(n为任意正整数或零),体域的外表面为a,若dV为体域上的微单元体积,$d\boldsymbol{a}$为微单元表面积矢量(如图3-5所示),则

$$\int_V dV\,\nabla\boldsymbol{\Phi}=\oint_a d\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.4}$$

Green 变换公式的证明方法如下:

以无数坐标曲面分割体域V,可将V分割为两类体积微元,一类为如图3-4所示的"完整"体积元ΔV,其表面为$\Delta\boldsymbol{a}$(即完全由三对坐标曲面所包围的体积元);另一类是在三维体域边界处如图3-6所示的各种"残缺"体积元ΔV_1,其表面为$\Delta\boldsymbol{a}_1$(即由几个坐标曲面和边界曲面包围的体积元)。

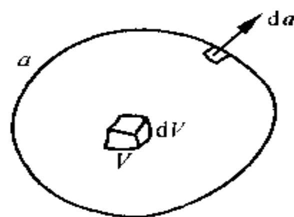
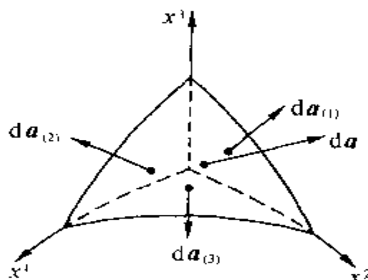


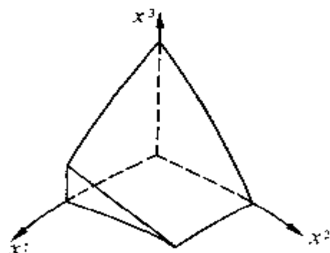
图3-5 封闭曲面a所包围的三维空域V

根据体积域积分的定义,式(3.9.4)的左端为

$$\int_V dV\,\nabla\boldsymbol{\Phi}=\lim_{\Delta V\to 0}\sum\int_{\Delta V}dV\,\nabla\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.5a}$$



(a)



(b)

图3-6 表面为$\Delta\boldsymbol{a}_1$的"残缺"体积微元ΔV_1

而对于每个"完整"的体积微元,可以证明

$$\int_{\Delta V}dV\,\nabla\boldsymbol{\Phi}=\oint_{\Delta a}d\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.5b}$$

这是由于当 ΔV 趋于无限小时，有

$$\int_{\Delta V} \mathrm{d}V \nabla \boldsymbol{\Phi} = \mathrm{d}V \nabla \boldsymbol{\Phi} = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^i}$$

利用证明式(3.9.3) 相类似的方法可证

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta a} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} &= \left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1 \boldsymbol{\Phi}_{(1)} + \frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1)\mathrm{d}x^1\right]\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 - \sqrt{g}\boldsymbol{g}^1 \boldsymbol{\Phi}_{(1)}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\ &\quad + \left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2 \boldsymbol{\Phi}_{(2)} + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^2)\mathrm{d}x^2\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 - \sqrt{g}\boldsymbol{g}^2 \boldsymbol{\Phi}_{(2)}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 \\ &\quad + \left[\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3 \boldsymbol{\Phi}_{(3)} + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^3)\mathrm{d}x^3\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 - \sqrt{g}\boldsymbol{g}^3 \boldsymbol{\Phi}_{(3)}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\ &= \left[\frac{\partial(\sqrt{g}\boldsymbol{g}^i)}{\partial x^i}\boldsymbol{\Phi} + \sqrt{g}\boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial x^i}\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

上式中 $\boldsymbol{\Phi}_{(1)}, \boldsymbol{\Phi}_{(2)}, \boldsymbol{\Phi}_{(3)}$ 分别为张量场函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 在坐标面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}$ 上的值，而由式(3.9.2)，上式中的第一项为零，第二项就是 $\int_{\Delta V} \mathrm{d}V \nabla \boldsymbol{\Phi}$，故式(3.9.5b) 得证。将式(3.9.5b) 对所有"完整" 体积元取和，得

$$\sum \int_{\Delta V} \mathrm{d}V \nabla \boldsymbol{\Phi} = \sum \oint_{\Delta a} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.5c}$$

将上式取极限，按照式(3.9.5a)，其左端项就是式(3.9.4) 的左端项，比较式(3.9.4) 与式(3.9.5c) 式的右端项，需要证明

$$\oint_{a} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} = \lim_{\Delta l \to 0} \sum \oint_{\Delta a} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.5d}$$

由于相邻两个体积元的公共表面具有方向相反的面积矢量，式(3.9.5c) 右端 $\sum \int_{\Delta a} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi}$ 是沿接近于体域表面 a 的由无数坐标面构成的曲面 $\sum \Delta a$ 的积分，图 3－7 所示意为该域的一个剖面。观察图 3－7 中任一个如图 3－6 所示"残缺" 体积微元 ΔV_1，以图 3－6(a) 为例，与它相邻的有三个"完整" 体积微元 ΔV，ΔV_1 与三个"完整" 体积微元的界面面元矢量分别为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}$，其正方向指向 ΔV_1 外，即 V 域内。如图 3－6(a) 所示，ΔV_1 的另一个表面为体域的边界面微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$，其正方向指向 V 外，ΔV_1 的表面 $\Delta \boldsymbol{a}_1$ 由 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}, \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 构成。

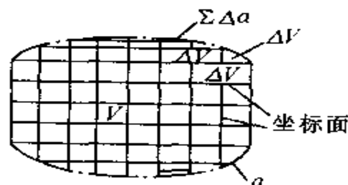


图 3－7 "完整"体积微元 δV 和"残缺"体积微元 ΔV_1

可以证明，若坐标曲面间的距离为 Δl 的量级，则每一个沿 $\Delta \boldsymbol{a}_1$ 的积分(以图 3－6(a) 所示那种"残缺" 体积元为例) 都只是$(\Delta l)^3$ 量级的小量。下式中设 $o(\Delta l)$ 为与 Δl 同量级的量：

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta a_1} \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} &= \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}\boldsymbol{\Phi}_{(1)} + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}\boldsymbol{\Phi}_{(2)} + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}\boldsymbol{\Phi}_{(3)} + \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}[\boldsymbol{\Phi} + o(\Delta l)] + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}[\boldsymbol{\Phi} + o(\Delta l)] + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}[\boldsymbol{\Phi} + o(\Delta l)] + \mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}o(\Delta l) + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}o(\Delta l) + \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}o(\Delta l)\end{aligned}$$

$$= o((\Delta l)^3) \tag{3.9.5e}$$

因此,若令 $\Delta l \to 0$,则式(3.9.5e) 右端趋于零,故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\Phi} = -\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(1)}\boldsymbol{\Phi}_{(1)} - \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(2)}\boldsymbol{\Phi}_{(2)} - \mathrm{d}\boldsymbol{a}_{(3)}\boldsymbol{\Phi}_{(3)} \tag{3.9.5f}$$

考虑到此处"完整"体积微元 ΔV 的面元矢量与"残缺"体积微元 ΔV_1 的面元矢量在界面处方向相反,沿界面两侧的积分差一符号,可见当 Δl 趋近于零时,沿"完整"体积微元 ΔV 外表面(坐标面)的积分就等于沿域外表面 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的积分,于是式(3.9.5d) 得证。由式(3.9.5a,c,d) 和式(3.9.4) 得证。

同理还可证得,当 $\boldsymbol{\Phi}$ 的阶数为任意正整数或零时,有

$$\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{\Phi}\,\nabla = \oint_a \boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.9.6}$$

当 $\boldsymbol{\Phi}$ 的阶数为任意正整数时,有

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.7}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{\Phi}\cdot\nabla = \oint_a \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.9.8}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\times\boldsymbol{\Phi} = \oint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.9}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{\Phi}\times\nabla = \oint_a \boldsymbol{\Phi}\times\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{3.9.10}$$

可以将以上诸式表示为分量式,但仅在直线坐标系中,基矢量是不变的,分量表示式才有意义。例如,设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是三阶张量,则

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$$

$$\nabla\boldsymbol{\Phi} = \nabla_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi} = \nabla_i\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\Phi} = \epsilon^{pl}{}_{\cdot\cdot i}\,\nabla_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = (\mathrm{d}a)n^l\boldsymbol{g}_l = (\mathrm{d}a)n_l\boldsymbol{g}^l = \mathrm{d}a_l\boldsymbol{g}^l$$

上式中 $\mathrm{d}a_l$ 是面积元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的协变分量。则上述式(3.9.4)、(3.9.7)、(3.9.9) 的分量形式分别为(注意到在直线坐标系中,$\nabla_l = \partial_l$)

$$\int_V \mathrm{d}V\partial_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} = \oint_a \mathrm{d}a_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} \tag{3.9.4a}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\partial_i\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} = \oint_a \mathrm{d}a_i\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} \tag{3.9.7a}$$

$$\int_V \mathrm{d}V\epsilon^{pl}{}_{\cdot\cdot i}\partial_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} = \oint_a \epsilon^{pl}{}_{\cdot\cdot i}\mathrm{d}a_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} \tag{3.9.9a}$$

3.9.3 Stokes 变换公式

Stokes 变换公式给出了张量场函数面积分与它沿曲面闭合周界的线积分的变换公式。若在开口曲面 a 上定义有 n 阶张量场函数(n 为任意正整数),曲面的周界为 f,$\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 是微单元周界线矢量,它的正方向与面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的正方向符合右手螺旋法则,如图 3 - 8 所示,则

$$\int_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\Phi}) = \oint_f \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\Phi} \tag{3.9.11}$$

$$\int_{a} (\boldsymbol{\Phi} \times \nabla) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\oint_{f} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{3.9.12}$$

上式的证明方法如下：将 a 分成很多微小三角片单元如图 3－9 所示，三角片的第一边为 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，第三边为 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$，第二边为 $\mathrm{d}\boldsymbol{t}-\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，此三边构成了三角片的周界 Δf。

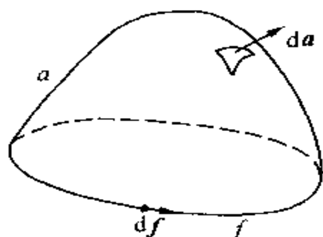


图 3－8　闭合曲面 f 上所张的开口曲面 a

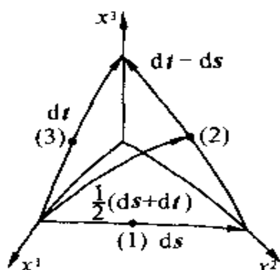


图 3－9　曲面分割为微小三角片单元

三角片三边的中点分别为(1)，(3)，(2)。由于三角片很小，故对于每个三角片，积分

$$\begin{aligned}
\oint_{\Delta f} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\Phi} &= \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{(1)} + (\mathrm{d}\boldsymbol{t} - \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{(2)} - \mathrm{d}\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{(3)} \\
&= \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi}\right) + (\mathrm{d}\boldsymbol{t} - \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \cdot \left[\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \mathrm{d}\boldsymbol{t}) \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi}\right] \\
&\quad - \mathrm{d}\boldsymbol{t} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi}) - \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{t} \cdot \nabla\boldsymbol{\Phi}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t}) : \nabla\boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}) : \nabla\boldsymbol{\Phi} \\
&= \boldsymbol{\Omega} : \nabla\boldsymbol{\Phi}
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量，表示为

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t} - \mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s})$$

根据第二章中式(2.5.4a)，对于二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 引入反偶矢量 $\boldsymbol{w}$，即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon} : (\mathrm{d}\boldsymbol{s}\mathrm{d}\boldsymbol{t} - \mathrm{d}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\boldsymbol{s}) \\
&= -\frac{1}{4}(\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{t} - \mathrm{d}\boldsymbol{t} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}) \\
&= -\frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{t}) = -\mathrm{d}\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

而由式(2.5.5)知

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

再代入前面的式子，并利用式(3.4.6)，则

$$\oint_{\Delta f} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Omega} : \nabla\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} : \nabla\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) = \int_{\Delta a} \mathrm{d}\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi})$$

上述等式两边对所有微单元求和，就证明了式(3.9.11)，同理可证式(3.9.12)。

在直线坐标系中，式(3.9.11) 可以表达为分量形式。若 $\boldsymbol{\Phi}$ 是三阶张量

$$\boldsymbol{\Phi} = \phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}f^i\boldsymbol{g}_i = \mathrm{d}f_i\boldsymbol{g}^i$$

则

$$\int_a \mathrm{d}a_p\varepsilon^{pl}{}_{\cdot\cdot i}\ \nabla_l\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} = \oint_f \mathrm{d}f_i\phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k} \tag{3.9.11a}$$

$$\int_a \phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k,l}\varepsilon^{klp}\mathrm{d}a_p = -\oint_f \phi^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\mathrm{d}f^k \tag{3.9.12a}$$

例 3.6 变形体中某点法线为 $\boldsymbol{n}$ 的截面上的应力矢量 $\boldsymbol{p}$ 与该点的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间的关系满足 Cauchy 公式

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$$

在所研究的物体内任取一体积域 V，其表面为 a，作用于单位质量的体积力为 $\boldsymbol{f}$，加速度为 $\boldsymbol{w}$，密度为 ρ，则运动方程为(注意到 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}a = \mathrm{d}\boldsymbol{a}$)

$$\int_a \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_V \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V = \int_V \rho\boldsymbol{w}\mathrm{d}V$$

应用式(3.9.8)，将 $\int_a \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 变换为 $\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla$，则上式成为

$$\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + \int_V \rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V = \int_V \rho\boldsymbol{w}\mathrm{d}V$$

考虑到 V 为任取，于是得到运动方程为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + \rho\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{w}$$

其分量形式可写作

$$\sigma_{i,j}^{\cdot j} + \rho f_i = \rho w_i$$

例 3.7 求证对于保守力场 $\boldsymbol{F}$，必定存在势函数 φ，使 $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$。

证明 由保守力场的定义，质点在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下运动时，力所做的功只与质点运动的起点与终点的位置有关，而与质点运动的路径无关。所以对于任意的闭合回路 l 来说，一定满足

$$\oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F} = 0$$

由 Stokes 公式，在这个力场中，有

$$\iint_a \mathrm{d}\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F} = 0$$

由于路径 l 是任意取的，所以在这个力场中，处处有

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

所以，力场 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场。

由式(3.4.8) 可知

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \varepsilon^{ijk}\partial_i F_j\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{0}$$

亦即

$$\varepsilon^{ijk}\partial_i F_j = 0 \qquad (k = 1,2,3)$$

展开上式就得

$$\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$$
$$\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = 0$$
$$\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 = 0$$

这是 $F_i \mathrm{d}x^i$ 存在全微分的条件。在单连域中存在函数 φ,使

$$\mathrm{d}\varphi = F_i \mathrm{d}x^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

$$F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

所以

$$\boldsymbol{F} = F_i \boldsymbol{g}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\boldsymbol{g}^i = \nabla \varphi$$

习 题 三

3.1 计算圆柱坐标系的两类克氏符号。

3.2 计算球坐标系的两类克氏符号。

3.3 求证:$\partial_i g^{jk} = -(g^{mj}\Gamma_{im}^{k} + g^{mk}\Gamma_{im}^{j})$。

3.4 已知 ϕ 为标量场,$\boldsymbol{v}$ 为矢量场,求证:

$$\nabla(\phi \boldsymbol{v}) = \phi \nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \phi)\boldsymbol{v}$$

3.5 设 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 均为矢量场,求证:

$$\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\nabla \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$$

3.6 设 $\boldsymbol{u}$ 为矢量场,$\boldsymbol{a}$ 为任意矢量,求证:

$$(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u} \nabla - \nabla \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{a}$$

3.7 求证下列恒等式:

(a) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$,其中 f 为标量场;

(b) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0$,其中 $\boldsymbol{u}$ 为矢量场。

3.8 在笛卡尔坐标系中,利用指标记法证明下列各式:

(a) $\nabla \cdot \boldsymbol{x} = 3$;

(b) $\nabla \times \boldsymbol{x} = 0$。

其中 $\boldsymbol{x}$ 表示位置矢量。

3.9 把 $\nabla \boldsymbol{a}$ 分解成对称部分和反对称部分之和,证明其中反对称部分的反偶矢量是

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{a}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为任意矢量。

3.10 若 $\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i$ 是位置矢量,$r^2 = x_i x_i$,而 $f(r)$ 是 r 的任意可微函数,证明:

(a) $= \nabla f(r) = f'(r)\boldsymbol{r}/r$;

(b) $\nabla^2 f(r) = f''(r) + 2f'(r)/r$

其中 $f'(r)$,$f''(r)$ 是 f 对 r 的一阶导数、二阶导数。

3.11 利用 Green 变换公式证明:

$$\int_{\Sigma} x_i n_j \mathrm{d}s = V\delta_{ij}$$

其中 $n_j\mathrm{d}s$ 表示体积 V 的边界曲面 Σ 的面素，x_i 是位置矢量，而 n_j 是面素的单位外法向矢量。

3.12　利用 Green 变换公式证明：

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}) \mathrm{d}s = 2V\boldsymbol{b}$$

其中 V 是封闭曲面 Σ 包围的体积，$\boldsymbol{n}$ 是它的单位外法向矢量，$\boldsymbol{x}$ 是位置矢量，$\boldsymbol{b}$ 是任意常矢量。

3.13　若矢量 $\boldsymbol{b} = \nabla \times \boldsymbol{u}$，证明：

$$\int_{\Sigma} \lambda b_i n_i \mathrm{d}s = \int_{\Omega} \lambda_{,i} b_i \mathrm{d}\Omega$$

其中 $\lambda = \lambda(x_i)$ 是标量函数，$\boldsymbol{u}$ 是矢量场。

3.14　证明封闭曲面 Σ 所围的体积 V 可用公式

$$V = \frac{1}{6}\int_{\Sigma} \nabla(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s$$

给出，其中 $\boldsymbol{x}$ 是位置矢量，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 单位外法向矢量。

4 张量场函数的导数

上一章所研究的张量场均只是空间位置(坐标)的函数,而与其他参数无关。在连续介质力学的许多领域中,张量场往往还随坐标以外的某些参数而变化。例如在动力学和流体力学问题中,张量场随时间 t 而变化。在变形固体静力学问题中,当超出线弹性范围后(例如塑性和粘弹性问题),就必须考虑变形历史的影响。为此需引入一个描述变形进程的参数(例如可取时间、载荷大小或塑性尺寸等),物体内的位移场和应力场都将同时是这个参数和坐标的函数。下面我们用 t 来表示参数。

本章讨论张量随参数 t 变化时的导数。这是研究连续介质力学问题时必须具备的数学知识。

4.1 质点的运动

物体是由质点组成的,在任何时刻,只要组成物体的各质点的位置已知,则物体的形状也就确定了。另一方面,许多物理量,例如位移、速度、加速度、力和密度等也都是定义在质点上的。所以在研究整个物体以前,应先讨论单个质点的运动以及定义在质点上的矢量的变化。

4.1.1 质点的运动速度

我们在前面已指出,任意空间点的位置可以用矢径

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3) = \boldsymbol{r}(x^i) \tag{4.1.1}$$

来表示。相邻两空间点的矢径差为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \boldsymbol{g}_i \mathrm{d}x^i \tag{4.1.2}$$

其中

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}_i(x^k) \tag{4.1.3}$$

为协变基矢量,它也是空间点位的函数。

现在研究某个在空间中运动着的质点,该质点在不同时刻占有不同的空间点位,例如在 t 时刻占有位置 P,而在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻占有位置 P'(如图 4-1 所示)。如果选用固定在空间的参考坐标,则运动质点的坐标值为 x^i,因而矢径 $\boldsymbol{r}$ 将是时间参数 t 的函数,即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^i(t)) \tag{4.1.1a}$$

当参数 t 变化 $\mathrm{d}t$ 时,按复合函数求导规则得矢径 $\boldsymbol{r}$ 对 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i \tag{4.1.4a}$$

这里应注意,式(4.1.2)中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示空间两相邻点位的矢径差,而式(4.1.4a)表示同一

个质点在 dt 时间间隔内矢径 $\boldsymbol{r}$ 的变化(即位移)。还应该指出，这里的 $\boldsymbol{g}_i$ 是运动质点该时刻所在位置的**瞬时基矢量**。本来按式(4.1.3)定义的 $\boldsymbol{g}_i$ 是固定坐标系的基矢量，它仅是空间点位的函数，与参数 t 无关。但由于质点在运动，不同时刻占有不同的空间位置，所以瞬时基矢量是间接地与参数 t 有关的，即

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i(x^k(t)) \quad (4.1.3a)$$

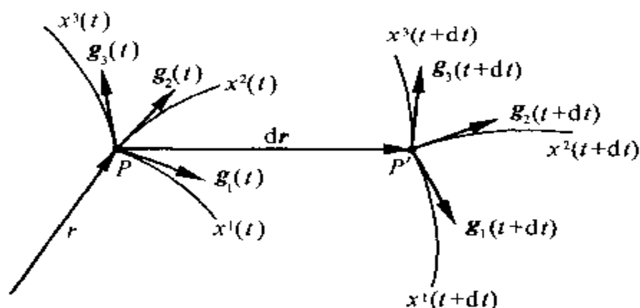


图 4-1　质点的运动

质点运动速度 $\boldsymbol{v}$ 等于该质点的矢径对参数的导数。把它对质点的瞬时基矢量分解

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v^i\boldsymbol{g}_i \tag{4.1.4b}$$

上式与式(4.1.4.a)相比较得

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = v^i(t) \tag{4.1.5}$$

即质点速度的逆变分量等于质点坐标对参数 t 的导数，显然它仍是参数 t 的函数。

4.1.2　任意矢量对参数的导数

把定义在质点上的任意矢量 $\boldsymbol{u}(t)$(例如质点的速度、加速度等)对瞬时的协变基或逆变基分解，得

$$\boldsymbol{u}(t) = u^i(t)\boldsymbol{g}_i(x^k(t)) = u_i(t)\boldsymbol{g}^i(x^k(t)) \tag{4.1.6}$$

当把矢量 $\boldsymbol{u}$ 对 t 求导时，应同时考虑分量和基矢量的变化。以按协变基分解式为例，则

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \frac{du^i(t)}{dt}\boldsymbol{g}_i + u^m\frac{d\boldsymbol{g}_m(x^k(t))}{dt}$$

为了方便，将右端第二项中的哑指标改为 m。利用复合函数求导规则和协变基矢量对坐标的导数公式(3.2.1)，有

$$\frac{d\boldsymbol{g}_m}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_m}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \Gamma^i_{km}\frac{dx^k}{dt}\boldsymbol{g}_i$$

代入前式，并利用式(4.1.5)，则

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \left(\frac{du^i(t)}{dt} + u^m v^k\Gamma^i_{km}\right)\boldsymbol{g}_i = \frac{Du^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i \tag{4.1.7}$$

其中

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{du^i}{dt} + u^m v^k\Gamma^i_{km} \tag{4.1.8}$$

称为矢量分量 u^i 对参数 t 的**全导数**。其中右端第一项反映了分量 u^i 随参数 t 的变化，第二项反映了因质点运动引起点位变化而导致的瞬时基矢量的变化。可以看到，如果质点无运动($v^k = 0$)或参考坐标系的基矢量与点位无关($\Gamma^i_{km} = 0$，例如在笛卡尔坐标系中)，则第二项为零，全导数就等于分量导数

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{du^i}{dt} \tag{4.1.8a}$$

同理，由式(4.1.6)中对逆变基的分解式并利用逆变基矢量对坐标的导数公式(3.2.11)可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}^i \tag{4.1.9}$$

其中

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - u_m v^k \Gamma_{ki}^m \tag{4.1.10}$$

应该指出：矢量 $\boldsymbol{u}$ 和参数 t 都是与坐标选择无关的物理量，所以 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 也是与坐标选择无关的矢量。由式(4.1.7)和式(4.1.9)可知，全导数 $\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}$ 和 $\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}$ 分别是矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 的逆变和协变分量，它们满足以下指标升降关系

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} &= g_{ij}\frac{\mathrm{D}u^j}{\mathrm{D}t}\\ \frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t} &= g^{ij}\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

但是分量导数 $\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$ 之间并不存在指标升降关系。因为式(4.1.8)和式(4.1.10)表明，全导数由两项组成，其中第二项中包含 Christoffel 符号，它并不是张量，因而第一项分量导数也不可能是矢量的分量，所以不存在指标升降关系。

如果把任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 取为质点速度 $\boldsymbol{v}$，则 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 就是质点的加速度 $\boldsymbol{a}$。由上面的讨论可知，$\boldsymbol{a}$ 对瞬时协、逆变基的分解式为

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i = a_i\boldsymbol{g}^i \tag{4.1.12a}$$

$$a^i = \frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + v^m v^k \Gamma_{km}^i \tag{4.1.12b}$$

$$a_i = \frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} - v_m v^k \Gamma_{ki}^m \tag{4.1.12c}$$

4.1.3 质点的速度和加速度

利用上述矢量对参数的导数公式，可以计算各种曲线坐标系中质点速度和加速度的张量分量和物理分量。

在笛卡尔坐标系中，张量分量和物理分量无区别，即

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

和

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

在圆柱坐标系中

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1 \quad \text{（其余分量为零）}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \quad \text{（其余分量为零）}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 的张量分量为

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} \\ v^2 &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} \\ v^3 &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z} \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

式中,用“·”表示对时间的导数。

速度 $\boldsymbol{v}$ 的物理分量为

$$\begin{aligned} v_{(1)} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} \\ v_{(2)} &= r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\dot{\theta} \\ v_{(3)} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z} \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的张量分量为

$$\begin{aligned} a^1 &= \frac{\mathrm{D}v^1}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} + v^m v^k \Gamma_{km}^1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a^2 &= \frac{\mathrm{D}v^2}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} + v^m v^k \Gamma_{km}^2 = \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} \\ a^3 &= \frac{\mathrm{D}v^3}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} + v^m v^k \Gamma_{km}^3 = \ddot{z} \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的物理分量为

$$\begin{aligned} a_{(1)} &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_{(2)} &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_{(3)} &= \ddot{z} \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

考虑如图 4－2 所示做平面圆周运动的管子,管内流体沿管轴方向流动,则式(4.1.16)给出了流体质点的运动学关系式。可以看到,径向加速度 $a_{(1)}$ 由两部分组成,一部分是流体对管壁的相对加速度 $\ddot{r}$,另一部分是由管子做圆周运动所引起的牵连法向加速度 $-r\dot{\theta}^2$。同样,切向加速度 $a_{(2)}$ 也由两部分组成,一部分是由管子作圆周运做运动引起的牵连切向加速度 $r\ddot{\theta}$,另一部分则是哥氏加速度 $2\dot{r}\dot{\theta}$。

对于常用的坐标系,可以直接用正交标准化基矢量的求导公式求得质点速度与加速度在曲线坐标系中的表达式。例如在圆柱坐标系中,设正交标准化基为 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$,其中 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$,

$\boldsymbol{e}_z$ 各为沿坐标 r,θ,z 变化的方向的单位矢量。$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_z$ 随点位而变化，因此它们都是坐标 r,θ,z 的函数。当质点运动时，质点位置处的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_z$ 方向通过 r,θ,z 的变化而随时间 t 不断变化。由复合函数求导公式，有

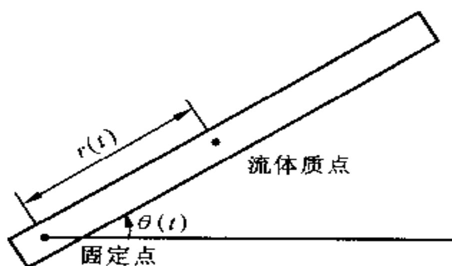


图 4－2　质点的加速度

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_r &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial z}\dot{z} \\
\dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial z}\dot{z} \\
\dot{\boldsymbol{e}}_z &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z}\dot{z}
\end{aligned}
\qquad (4.1.17)
$$

将圆柱坐标系中单位基矢量 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z$ 对坐标 r,θ,z 的导数公式代入上式，得

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_r &= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\
\dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \\
\dot{\boldsymbol{e}}_z &= 0
\end{aligned}
\qquad (4.1.18)
$$

其实，式(4.1.18)很容易直观写出，无需上述推导。

设质点矢径 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$，加速度 $\boldsymbol{a}$ 的表达式各为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{v} &= v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_z\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{a} &= a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta + a_z\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
\qquad (4.1.19)
$$

式中，v_r,v_θ,v_z 为速度的物理分量，即 $v_{(1)},v_{(2)},v_{(3)}$；a_r,a_θ,a_z 为加速度的物理分量，即 $a_{(1)}$，$a_{(2)},a_{(3)}$。利用矢径 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的关系有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}
\qquad (4.1.20)
$$

将式(4.1.19)代入式(4.1.20)，并利用式(4.1.18)，可得速度的物理分量为

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} \\
v_\theta &= r\dot{\theta} \\
v_z &= \dot{z}
\end{aligned}
\qquad (4.1.21)
$$

而加速度的物理分量为

$$
\begin{aligned}
a_r &= \dot{v}_r - v_\theta\dot{\theta} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\
a_\theta &= v_r\dot{\theta} + \dot{v}_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\
a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z}
\end{aligned}
\qquad (4.1.22)
$$

很明显，式(4.1.21)就是式(4.1.14)，式(4.1.22)就是式(4.1.16)。读者应该学会在常用的坐标系中，不用书中的公式，而直接迅速地导出以上类似的公式。

4.2　Euler 坐标与 Lagrange 坐标

下面来研究由许多质点组成的连续介质。在连续介质中，不同质点在同一时刻占有不同

的空间点位，这描述了在该时刻连续介质各质点所在的位置，或者说，这描述了连续介质在该时刻的构形。另一方面，同一质点在不同时刻也占有不同的空间点位，这说明了该质点的运动规律，而所有质点的运动规律也就构成了连续介质的运动规律。有两种描述连续介质运动的方法。

4.2.1 Euler 坐标

Euler 坐标是固定在空间中的参考坐标，又称**空间坐标**或**固定坐标**，记做 x^i。它不随质点运动或时间参数 t 而变化，是一种描述物体运动的静止背景。每组 Euler 坐标值 $x^i(i=1,2,3)$ 定义了一个固定点位。如用矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表示空间点位，见图 4－3，则如式(4.1.1)，即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^i) \tag{4.2.1}$$

以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示相邻两质点间的线段，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x^i\boldsymbol{g}^i \tag{4.2.2}$$

其中，协变基矢量

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}_i(x^k) \tag{4.2.3}$$

是随空间点位而变化的，在以前各章中，所讨论的都是固定在空间的 Euler 坐标。利用前面的知识已经得到度量张量

$$\boldsymbol{G} = g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j, g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \tag{4.2.4}$$

和 Christoffel 符号的计算公式，见式(3.2.7a) 和(3.2.7b)。它们都是与参数 t 无关的。

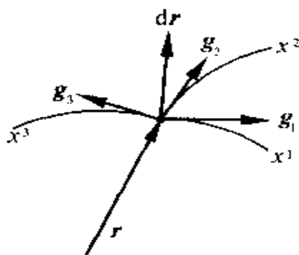


图 4－3　Euler 坐标

质点的运动在 Euler 坐标系中表示为：同一质点在不同时刻占有不同的空间点位，因而质点的 Euler 坐标值是随参数 t 而变化的，如式(4.1.1a)，即

$$\boldsymbol{r}_{(\xi)} = \boldsymbol{r}_{(\xi)}(x^i(t)) \tag{4.2.1a}$$

于是，与质点瞬时位置相关的基矢量、度量张量和 Christoffel 符号等也都通过质点坐标 $x^i(t)$ 间接地与参数 t 有关了。不同的质点 ξ 有不同的运动规律，在式(4.2.1a) 中用下标“ξ” 加以区别。

4.2.2 Lagrange 坐标

Lagrange 坐标是嵌在物体质点上、随物体一起运动和变形的坐标，又称**物质坐标**或**随体坐标**，记做 ξ^i。无论物体怎样运动和变形，每个质点变到什么位置，同一质点的 Lagrange 坐标值是始终保持不变的，所以每组 Lagrange 坐标值 $\xi^i(i=1,2,3)$ 定义了一个运动着的质点。我们有时就用 ξ^i 表示质点，就好像用姓名表示一个人一样，无论这个人走到哪里，他的姓名是不变的。

Lagrange 坐标的这一特性可以用图 4－4 来说明。考虑变形前在 ξ^1 坐标线上的三个质点 O,A,B，它们的 ξ^2 和 ξ^3 坐标值均为零。由于 Lagrange 坐标是嵌在质点上的，所以变形后三个质点的新位置 O',A',B' 仍在同一条 ξ^1 坐标线上，且新坐标值 ξ^2 和 ξ^3 仍均为零。虽然弧段 $O'A'$ 和 $A'B'$ 可以比原 OA 和 AB 长(或短)，但由于度量的尺子(坐标系)也发生了完全相同的伸长(或缩短)，所以读数(O',A',B' 各点的新 ξ^1 坐标值)仍保持不变。OAB 是变形前的 ξ^1 坐标线，$O'A'B'$ 是变形后的 ξ^1 坐标线，它们是由相同的一些质点组成的。对于其他质点也可作

完全类似的解释。

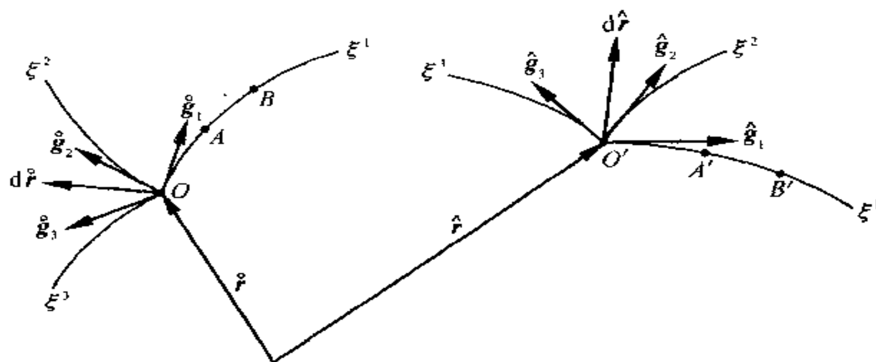


图 4－4　Lagrange 坐标

在变形前 $t=0$ 时刻物体的初始形态中，矢径

$$\boldsymbol{r}=\mathring{\boldsymbol{r}}(\xi^i) \tag{4.2.5}$$

是随质点(即 Lagrange 坐标值 ξ^i) 而异的。相邻两质点间的线段为

$$\mathrm{d}\mathring{\boldsymbol{r}}=\mathrm{d}\xi^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i \tag{4.2.6}$$

其中

$$\mathring{\boldsymbol{g}}_i=\frac{\partial\mathring{\boldsymbol{r}}}{\partial\xi^i}=\mathring{\boldsymbol{g}}_i(\xi^k) \tag{4.2.7}$$

是 $t=0$ 时刻 Lagrange 坐标系的协变基矢量，它也是随质点而异的。由此可求得初始构形中(即 $t=0$ 时) 的度量张量

$$\mathring{\boldsymbol{G}}=\mathring{g}_{ij}\mathring{\boldsymbol{g}}^i\mathring{\boldsymbol{g}}^j,\qquad \mathring{g}_{ij}=\mathring{\boldsymbol{g}}^i\cdot\mathring{\boldsymbol{g}}^j \tag{4.2.8}$$

并可进一步由式(3.2.7a) 和式(3.2.7b) 求得相应的 Christoffel 符号。这里用每个量上面的小圆圈“∘”表示 $t=0$ 时刻的值。

下面来研究物体变形后的构形。如图 4－4 所示，变形使组成物体的各个质点运动到新的空间位置。相应地，矢径 $\boldsymbol{r}$ 由初始位置 $\mathring{\boldsymbol{r}}$ 变为

$$\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{r}}(\xi^i,t) \tag{4.2.9}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是坐标 ξ^i 和参数 t 的函数。但坐标 ξ^i 本身与 t 无关，因为无论物体怎样变形，同一质点的 Lagrange 坐标始终保持不变。对此，我们说 Lagrange 坐标是随物体一起变形的，或称“随体”的。质点坐标和时间参数能各自独立变化，这是 Lagrange 描述法的主要优点。

现在把 t 固定，即考虑变形过程中 t 时刻物体的构形，则连接相邻两质点的线段为

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\xi^i}\mathrm{d}\xi^i=\mathrm{d}\xi^i\hat{\boldsymbol{g}}_i \tag{4.2.10}$$

其中，求偏导数 $\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\xi^i}$ 时，参数 t 应视为常数。而

$$\hat{\boldsymbol{g}}_i=\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}}{\partial\xi^i}=\hat{\boldsymbol{g}}_i(\xi^k,t) \tag{4.2.11}$$

是 t 时刻 Lagrange 坐标系的协变基矢量，它是随点而异的。由于 Lagrange 坐标系是随物体一起变形的，由式(4.2.9)，在不同时刻 t，矢径 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 和坐标 ξ^i 的函数关系也不相同，所以就整个变

形过程来说，基矢量 $\hat{g}_i$ 又是参数 t 的函数。由 $\hat{g}_i$ 可以求得各瞬时 Lagrange 坐标的度量张量

$$\hat{G} = \hat{g}_{ij}\hat{g}^i\hat{g}^j, \quad \hat{g}_{ij} = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j \tag{4.2.12}$$

以及相应的 Christoffel 符号 $\hat{\Gamma}_{ij}^k$。它们也都是随参数 t 而变化的。当 $t = 0$ 时，$\hat{g}_i$、$\hat{G}$ 和 $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ 等就各化为 $\mathring{g}_i$、$\mathring{G}$ 和 $\mathring{\Gamma}_{ij}^k$ 等。

比较两种描述方法可以看到：在 Euler 坐标系中，物体的变形表现为同一质点坐标 x^i 的不断变化，而坐标系 x^i 本身保持不变。在 Lagrange 坐标系中，物体的变形表现为坐标系 ξ^i 本身性质（$\hat{g}_i$、$\hat{G}$ 和 $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ 等）的不断变化，而质点坐标 ξ^i 保持不变。

由于 Lagrange 坐标 ξ^i 的这个优点，使推导公式更为方便。例如在求任何量的物质导数时，只需要保持 ξ^i 不变，对时间 t 求导；而若采用 Euler 坐标系 x^i，则求物质导数时，不但要考虑时间 t 的变化，还要考虑由于质点的运动，x^i 也随时间变化。采用 Lagrange 坐标系的缺点是它只能是曲线坐标系。即使在变形前 $t = 0$ 时刻 ξ^i 为笛卡尔直角坐标，三族坐标线（ξ^i = const）都是相互正交的直线，但在变形后 t 时刻这些坐标线随着物体质点的变位都变成曲线。而 Euler 坐标 x^i 的优点是坐标只与空间的点位有关，如果我们采用笛卡尔直角坐标，三族坐标线（x^i = const）不管物体如何运动，始终保持是直线。因此最方便的做法是用 Lagrange 坐标系推导公式，然后转换到 Euler 坐标系（可采用笛卡尔直角坐标系）中进行计算。

4.2.3 两种坐标系的转换公式

上面引进了两种坐标系来描述同一个物理现象——物体的运动和变形，显然它们之间必存在某种转换关系。由式(4.2.1)、式(4.2.9)物体的 Euler 坐标 x^i 是因质点而异的，每个质点的 Euler 坐标又是随时间而变化的，所以 Euler 坐标 x^i 是质点和时间的函数。在 Lagrange 坐标系中，质点和时间分别用坐标 ξ^j 和参数 t 来表示，于是式(4.2.9)可表示成

$$x^i = x^i(\xi^j, t) \tag{4.2.13}$$

该式给出了**两种坐标的转换关系**。这个转换关系式(4.2.13)是随参数 t 而变化的。对于确定的时刻 t，上式化为该瞬时两个"静止"坐标之间的转换关系。在第一章中导出的转换系数公式和基矢量以及任意张量分量的转换公式现在都同样适用（只要把 ξ^i 看作 $x^{i'}$，$\hat{g}_i$ 看作 $g_{i'}$，$\hat{g}^i$ 看作 $g^{i'}$）。例如，基矢量的转换关系为

$$\hat{g}_i = g_j \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}, \qquad \hat{g}^i = g^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \tag{4.2.14a}$$

$$g_i = \hat{g}_j \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}, \qquad g^i = \hat{g}^j \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \tag{4.2.14b}$$

x^i 与 ξ^j 互相求导时参数 t 应看作常数。

4.2.4 质点速度和物质导数

物理和力学问题中的研究对象绝大多数都是定义在连续介质各质点上（而不是空间点上）的标量场、矢量场和张量场。在 4.1 节中已讨论过单个质点的运动速度，即矢径 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的导数

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{4.2.15}$$

对于由许多质点组成的连续介质，矢径 $\boldsymbol{r}$ 同时与质点和时间有关，以式(4.2.13)代入式(4.1.1)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^i(\xi^j, t)) \tag{4.2.16}$$

为了求介质中以 Lagrange 坐标值 ξ^j 为标志的那个质点的速度，可以令 ξ^j 保持不变(即观察同一个质点）而对 t 求偏导数

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \boldsymbol{g}_i v^i \tag{4.2.17}$$

这是速度 $\boldsymbol{v}$ 对 Euler 坐标系基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的分解式。通常把保持质点坐标 ξ^j 不变，对时间 t 的偏导数称为**物质导数**，并记做

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{4.2.18}$$

它表示定义在质点上，跟随质点运动的物理量对参数 t 的导数。于是由前式得

$$v^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = v^i(\xi^j, t) \tag{4.2.17a}$$

这在形式上和式(4.1.5) 相同，但现在 v^i 不仅是 t，而且还是 ξ^j 的函数，当 ξ^j 取其他值时，表示的是其他质点的运动速度。

速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 既可对 Euler 基矢量 $\boldsymbol{g}_i$、$\boldsymbol{g}^i$ 分解，也可对 Lagrange 基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_i$、$\hat{\boldsymbol{g}}^i$ 分解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \hat{\boldsymbol{v}}\\ \boldsymbol{v} &= v^i\boldsymbol{g}_i = v_i\boldsymbol{g}^i\\ \hat{\boldsymbol{v}} &= \hat{v}^i\hat{\boldsymbol{g}}_i = \hat{v}_i\hat{\boldsymbol{g}}^i\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

其中，同一坐标系中的协变、逆变分量满足指标升降关系

$$\begin{aligned}v^i &= g^{ij}v_j, \qquad v_i = g_{ij}v^j\\ \hat{v}^i &= \hat{g}^{ij}\hat{v}_j, \qquad \hat{v}_i = \hat{g}_{ij}\hat{v}^j\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

不同坐标系中的分量满足如下转换关系

$$\hat{v}^i = v^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \qquad \hat{v}_i = v_j\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \tag{4.2.21a}$$

$$v^i = \hat{v}^j\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}, \qquad v_i = \hat{v}_j\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \tag{4.2.21b}$$

4.3 基矢量的物质导数

因为定义在质点上的物理量都将对各瞬时该质点所在位置处的基矢量分解，所以首先要研究关于基矢量的物质导数。

4.3.1 Lagrange 基矢量的物质导数

在 Lagrange 坐标系中，矢径为

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\xi^i, t)$$

把 t 固定，对 ξ^i 求偏导数得 t 时刻的 Lagrange 协变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_i(\xi^i, t)$，又称**随体协变基矢量**。再把 ξ^i 固定，对 t 求偏导数就得 $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 的物质导数。

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \xi^i}\right)_t\right]_{\xi^j}$$

注意到,Lagrange 坐标系中带$\hat{()}$的量都是 ξ^i 和 t 的函数,而 ξ^i 和 t 又是相互独立的自变量,求偏导数本身已隐含着"其他独立自变量保持不变"的意思,所以

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{()}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{()}\right)_{\xi^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{()}\quad（下标 \xi^i 表示 \xi^i 不变, i=1,2,3）$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i}\hat{()}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\hat{()}\right)_t\quad（下标 t 表示 t 不变）\tag{4.3.1}$$

再注意到因设 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是 ξ^i 和 t 的连续可微函数,其高阶导数与求导顺序无关,则

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \xi^i}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

式中,$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$ 就是质点 ξ^i 的运动速度 $\boldsymbol{v}$,把它对随体协变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_k$ 分解得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^i}=\frac{\partial}{\partial \xi^i}(\hat{v}^k\hat{\boldsymbol{g}}_k)=\hat{v}^k_{.i}\hat{\boldsymbol{g}}_k=(\hat{\nabla}_i\hat{v}^k)\hat{\boldsymbol{g}}_k\tag{4.3.2}$$

符号 $\hat{\nabla}_i$ 为 t 时刻 Lagrange 坐标系中对 ξ^i 的协变导数。

t 时刻速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的梯度在 Lagrange 坐标系中的分解式为

$$\hat{\nabla}\boldsymbol{v}=\hat{\nabla}_i\hat{v}^k\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}_k\tag{4.3.3a}$$

或

$$\boldsymbol{v}\hat{\nabla}=\hat{v}^k_{.i}\hat{\boldsymbol{g}}_k\hat{\boldsymbol{g}}^i=\hat{\nabla}_i\hat{v}^k\hat{\boldsymbol{g}}_k\hat{\boldsymbol{g}}^i\tag{4.3.3b}$$

式中,$\hat{\nabla}$ 表示在 Lagrange 坐标系中的 Hamilton 算子。于是,式(4.3.2) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t}=\hat{\boldsymbol{g}}_i\cdot(\hat{\nabla}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\hat{\nabla})\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i\tag{4.3.4}$$

即随体基矢量的物质导数等于介质速度场的梯度与随体基矢量的点积。从物理上看,$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t}$ 反映了物体变形和转动的变化率。式(4.3.4) 表明,物体的变形和转动是由同一时刻各质点间的速度梯度引起的。若各质点的速度相同(即刚体作平动),则 $\boldsymbol{v}$ 为均匀矢量场,梯度 $\hat{\nabla}\boldsymbol{v}$ 为零张量,因而 $\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t}=0$,物体的变形和转动的变化率为零。

由对偶关系 $\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_j=\delta^i_j$,把它对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_j)=0$$

就可求得 Lagrange 逆变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}^i$ 的物质导数,即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^i}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_j=-\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_j}{\mathrm{d}t}=-\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\hat{\nabla}_j\hat{v}^k\hat{\boldsymbol{g}}_k=-\hat{\nabla}_j\hat{v}^k\delta^i_k=-\hat{\nabla}_j\hat{v}^i$$

由上式就很容易得到

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^i}{\mathrm{d}t}=-\hat{\nabla}_j\hat{v}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j\tag{4.3.5}$$

或利用式(4.3.3) 改写成

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^i}{\mathrm{d}t}=-(\hat{\nabla}\boldsymbol{v})\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^i=-\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot(\boldsymbol{v}\hat{\nabla})\tag{4.3.6}$$

应该指出,Lagrange 逆变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}^i$ 是由随体基矢量$\hat{\boldsymbol{g}}_j$ 通过对偶关系派生出来的,它并不是随体变化的。当物体伸长时,逆变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}^i$ 可能反而缩短。例如考虑无转动的均匀伸长变

形情况。这时随体基矢量(如 $\hat{g}_1$)将和物体一起伸长，为了保证对偶关系 $\hat{g}^1 \cdot \hat{g}_1 = 1$，Lagrange 逆变基矢量 $\hat{g}^1$ 必须相应地缩短。式(4.3.6) 和式(4.3.4) 两式右端的符号不同正说明当协变基矢量随体伸长时，逆变基矢量反而缩短了。

4.3.2 度量张量的物质导数、应变率张量

通过随体基中度量张量的分量 $\hat{g}_{ij}$ 可以算出相邻两质点间的线元长度以及两线元间的夹角，所以 $\hat{g}_{ij}$ 对 t 的物质导数表征了物体变形(伸缩或畸变)的速率。由式(4.3.2) 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{g}_{ij} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_j) = \hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_j \\ &= \hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot (\hat{\nabla}_j \hat{v}^k \hat{\boldsymbol{g}}_k) + (\hat{\nabla}_i \hat{v}^k \hat{\boldsymbol{g}}_k) \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_j \\ &= (\hat{\nabla}_j \hat{v}^k)\hat{g}_{ik} + (\hat{\nabla}_i \hat{v}^k)\hat{g}_{kj}\end{aligned} \tag{4.3.7a}$$

由于度量张量 $\hat{g}_{kj}$ 的协变导数为零，再结合度量张量升降标作用，上式可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{g}_{ij} = \hat{\nabla}_j(\hat{v}^k\hat{g}_{ik}) + \hat{\nabla}_i(\hat{v}^k\hat{g}_{kj}) = \hat{\nabla}_j\hat{v}_i + \hat{\nabla}_i\hat{v}_j \tag{4.3.7}$$

一般来说，速度分量的协变导数指标顺序不可更换，即

$$\hat{\nabla}_i\hat{v}_j \neq \hat{\nabla}_j\hat{v}_i$$

说明它对指标 i 和 j 是不对称的。但很明显，它们的和对指标 i 和 j 是对称的。通常把 Lagrange 坐标系中度量张量协变分量的物质导数的二分之一定义为**应变率分量**，记做 $\hat{d}_{ij}(\xi^k, t)$，即

$$\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{g}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_j\hat{v}_i + \hat{\nabla}_i\hat{v}_j) \tag{4.3.8}$$

写成并基展开式，定义

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{d}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{g}_{ij}\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j = \hat{d}_{ij}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_j\hat{v}_i + \hat{\nabla}_i\hat{v}_j)\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j \\ &= \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{v}}\,\hat{\nabla} + \hat{\nabla}\,\hat{\boldsymbol{v}})\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

为**应变率张量**。$\hat{\nabla}$ 表示在 Lagrange 坐标系 ξ^i 中的 Hamilton 算子。$\hat{\boldsymbol{d}}$ 是速度梯度式(4.3.3) 对称化的结果，是质点坐标 ξ^k 和参数 t 的函数。和速度梯度一样，它也与坐标系的选择无关。对于确定的时刻 t，同一个应变率张量也可对 Euler 基矢量分解为

$$\boldsymbol{d} = d_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\,\nabla + \nabla\,\boldsymbol{v}) \tag{4.3.10}$$

这里 ∇ 表示在 Euler 坐标系 x^i 中的 Hamilton 算子。在式(4.3.9) 中用 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 表示(4.2.19) 中第二式的 $\boldsymbol{v}$，只是为了提示 $\boldsymbol{v}$ 应在 Lagrange 基矢量中进行分解，其实 $\boldsymbol{v}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 是同一个矢量，即 $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}}$。事实上，Hamilton 算子具有坐标不变性，即 $\hat{\nabla} = \nabla$。我们只是为了表示式(4.3.9) 和式(4.3.10) 是在不同坐标系中的分量展开式，才分别用 $\hat{\nabla}$ 与 ∇ 来表示同一个 Hamilton 算子。式(4.3.10) 中的 $\boldsymbol{d}$ 与式(4.3.9) 中的 $\hat{\boldsymbol{d}}$ 是同一个应变率张量，$\boldsymbol{d}$ 和 $\hat{\boldsymbol{d}}$ 符号可以通用。

在上述推导过程中，并没有对速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的大小进行限制。所以上述公式同时适用于小变形和大变形情况。

还应指出，在 Lagrange 坐标系中度量张量协变分量 $\hat{g}_{ij}$ 的物质导数反映了物体的变形速率，而度量张量 $\boldsymbol{G}$ 本身却与时间无关，即 $\boldsymbol{G}$ 的物质导数为零张量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.3.11}$$

这是因为,如果物体的变形使协变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 伸长,造成 $\boldsymbol{G}$ 的协变分量 $\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{g}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_j$ 变大,则必同时导致与 $\hat{g}_{ij}$ 相配的逆变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}^i, \hat{\boldsymbol{g}}^j$ 缩短,因而总的效果是 $\boldsymbol{G}$ 本身保持不变。利用式(4.3.6) 与式(4.3.9) 可以证明

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{g}_{ij})\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j + \hat{g}_{ij}\left(\hat{\boldsymbol{g}}^i\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^j\right) \\
&= 2\boldsymbol{d} - \hat{g}_{ij}\{\hat{\boldsymbol{g}}^i[\hat{\boldsymbol{g}}^j \cdot (\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla})] + [(\hat{\nabla}\,\boldsymbol{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{g}}^i]\hat{\boldsymbol{g}}^j\} \\
&= 2\boldsymbol{d} - \{\hat{\boldsymbol{g}}_j[\hat{\boldsymbol{g}}^j \cdot (\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla})] + [(\hat{\nabla}\,\boldsymbol{v}) \cdot \hat{\boldsymbol{g}}^i]\hat{\boldsymbol{g}}_i\} \\
&= (\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla} + \hat{\nabla}\,\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla} + \hat{\nabla}\,\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

所以应变率张量 $\boldsymbol{d}$ 与度量张量 $\boldsymbol{G}$ 的物质导数(为零) 无关,仅它们的分量 $\hat{d}_{ij}$ 与 $\hat{g}_{ij}$ 应满足关系式(4.3.8)。

4.3.3 速度场的加法分解

在连续介质中相邻质点间的速度差,即速度梯度场 $\hat{\nabla}\,\boldsymbol{v}$,将同时导致介质微元的变形和刚体转动的变化率。其中刚体转动部分与应力无关,需要把它分割出来。为此对速度梯度场作加法分解,即

$$\hat{\nabla}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{v}}\,\hat{\nabla} + \hat{\nabla}\,\hat{\boldsymbol{v}}) - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{v}}\,\hat{\nabla} - \hat{\nabla}\,\hat{\boldsymbol{v}}) \tag{4.3.12}$$

其中右端第一项就是上面已定义的应变率张量 $\boldsymbol{d}$,它是速度梯度的对称部分。第二项称为**旋率张量**(或简称**旋率**),并记为 $\boldsymbol{\Omega}$,即

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{v}}\,\hat{\nabla} - \hat{\nabla}\,\hat{\boldsymbol{v}}) = \hat{\Omega}_{ij}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j$$

$$\hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_j\hat{v}_i - \hat{\nabla}_i\hat{v}_j) = \frac{1}{2}(\hat{v}_{i,j} - \hat{v}_{j,i}) \tag{4.3.13}$$

它是速度梯度进行反对称化的结果,表示介质微元的刚体转动速率。它在 Euler 坐标系中的并矢形式为

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\,\nabla - \nabla\,\boldsymbol{v}) = \Omega_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \tag{4.3.14}$$

于是速度梯度的加法分解式(4.3.12) 可写成

$$\begin{aligned}
\nabla\,\boldsymbol{v} &= \hat{\nabla}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\Omega} \\
\boldsymbol{v}\,\nabla &= \boldsymbol{v}\,\hat{\nabla} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\Omega}
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

下面从速度增量的角度来进一步说明加法分解和旋率张量的物理意义。考虑连续介质中相邻两个质点 A 和 B,它们的矢径分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$,速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$,如图 4－5(a) 所示。把速度梯度的加法分解式(4.3.15) 代入式(3.3.7) 和例 3.1 的结论,则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\,\nabla) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot (\nabla\,\boldsymbol{v})$$

得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(d)} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(\Omega)} = \boldsymbol{d} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.3.16}$$

其中第一项与应变率张量 $\boldsymbol{d}$ 有关,表示由质点 A 邻域内的介质变形所引起的质点 B 的速度

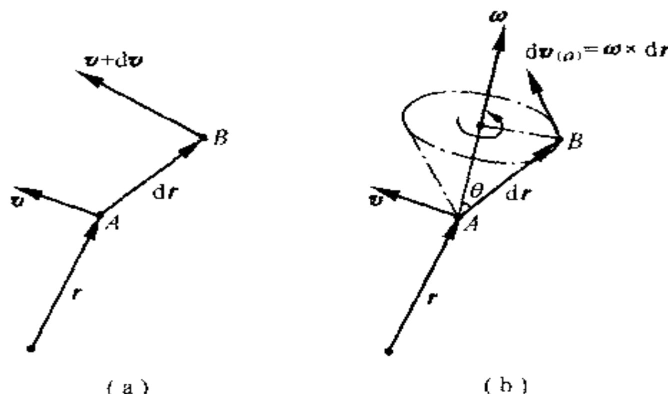


图 4－5　速度场的加法分解

增量。为了证明第二项的意义，引入反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega} \tag{4.3.17a}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.3.17b}$$

把式(4.3.13) 代入式(4.3.17a) 得

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\hat{\nabla} - \hat{\nabla}\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{4}\boldsymbol{v}\times\hat{\nabla} + \frac{1}{4}\hat{\nabla}\times\boldsymbol{v}$$

$$= \frac{1}{2}\hat{\nabla}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{4.3.18a}$$

可见矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与速度场的旋度有关，它表示介质微元绕 A 点的刚体转动速率，称为**角速度矢量**。而旋率张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 与角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 有一一对应的反偶关系(4.3.17)，所以它们都是介质微元刚体转动速率的不同表示形式。把式(4.3.17b) 代入式(4.3.16) 的右端第二项，并考虑到 $\boldsymbol{\Omega}$ 为反对称张量，则有

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{r}) : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{r})$$

$$= \boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.3.18b}$$

由图 4－5(b) 可以看出：由 A 点转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 所引起的邻近 B 点相对于 A 点的速度差 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(\Omega)}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 所构成的平面，且大小为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{\omega}||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\sin\theta$。若用矢积表示，就是上面的 $\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。于是，速度差的加法分解式(4.3.16) 可改写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.3.18}$$

其中第一项为微元变形引起的速度差 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(d)}$；若微元仅作刚体转动，则 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(d)} = \boldsymbol{0}$。第二项为微元转动引起的速度差 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(\Omega)}$；若微元为纯变形情况，则 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{(\Omega)} = \boldsymbol{0}$。

对 Lagerange 基矢量的物质导数也可以作相应的加法分解。把式(4.3.15) 代入式(4.3.4) 和式(4.3.6) 得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{g}}_i \tag{4.3.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^i}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{g}}^i \tag{4.3.20}$$

4.3.4 Euler 基矢量的物质导数

Euler 基矢量本来是固定在空间、与时间参数 t 无关的。但对运动质点(ξ^k) 来说，在不同时刻 t，它将占有不同的空间点位(x^j)，由于不同点位处的 Euler 基矢量一般说是变化的(其变化规律可以用 Christoffel 符号来表示)，所以与运动质点各瞬时位置所对应的 Euler 基矢量是间接地与参数 t 有关的，即

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i(x^j(\xi^k, t)) \tag{4.3.21}$$

物质导数是研究跟随质点(ξ^k 保持不变) 时物理量的变化率。根据复合求导规则、基矢量对坐标求导公式(3.2.1) 和(4.1.5)，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = v^j\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k \tag{4.3.22}$$

利用基矢量的对偶关系和上式，可进一步导出 Euler 逆变矢量的物质导数，因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}^i}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{g}_l = -\boldsymbol{g}^i\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_l}{\mathrm{d}t} = -v^j\Gamma_{lj}^k\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_k = -v^j\Gamma_{lj}^k\delta_k^i = -v^j\Gamma_{lj}^i$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}^i}{\mathrm{d}t} = -v^j\Gamma_{lj}^i\boldsymbol{g}^l \tag{4.3.23}$$

式(4.3.22) 和式(4.3.23) 说明：Euler 基矢量的物质导数与质点运动速度及 Christoffer 符号有关。对于直线坐标系($\Gamma_{ij}^k = 0$) 或当质点固定不动($v^j = 0$) 时，Euler 基矢量的物质导数为零。

与此对照，Lagrange 基矢量的物质导数(见式(4.3.2) 和式(4.3.5)) 却与速度梯度有关。所以对于同一个运动状态，这两种基矢量的物质导数是不同的。例如，物体作刚体平移时，速度梯度为零，所以 Lagrange 基矢量的物质导数为零。这是因为 Lagrange 协变基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 是嵌入在物体上的，随物体一起变形和转动。当物体作刚体平移时，既无变形又无转动，$\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 的大小与方向均不变。但是速度本身并不为零，所以在 $\Gamma_{ij}^k \neq 0$ 的任意曲线坐标系中，Euler 基矢量的物质导数不等于零。尽管物体只作刚体平移，无变形和无转动，但每个质点在空间中移动位置，仍然使得 Euler 基矢量发生变化(因为曲线坐标系中基矢量随位置变化)。

4.4 矢量场函数的导数

本节研究矢量 $\boldsymbol{u}$ 随质点而异并随时间变化的情况。例如 $\boldsymbol{u}$ 可以是连续介质各质点的位移、速度或加速度矢量等。此时 $\boldsymbol{u}$ 称为矢量场。

4.4.1 Lagrange 坐标系中矢量场函数的物质导数

把矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿 Lagrange 基矢量分解为

$$\boldsymbol{u} = \hat{u}^i(\xi^k, t)\hat{\boldsymbol{g}}_i(\xi^k, t) = \hat{u}_i(\xi^k, t)\hat{\boldsymbol{g}}^i(\xi^k, t) \tag{4.4.1}$$

对上式求物质导数，并利用式(4.3.2) 得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \hat{u}^m\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_m}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m\hat{\nabla}_m\hat{v}^i\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i \tag{4.4.2}$$

或利用式(4.3.4),按式(4.3.15)作加法分解,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \hat{u}^m\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + (\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla})\cdot\boldsymbol{u} \\ &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} \\ &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \hat{u}^m\hat{d}^i{}_{\cdot m}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \hat{u}^m\hat{\Omega}^i{}_{\cdot m}\hat{\boldsymbol{g}}_i\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

如果采用式(4.4.1)的第二式,把 $\boldsymbol{u}$ 对逆变基矢量分解,则相应地由式(4.3.5)有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i + \hat{u}_m\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{g}}^m}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} - \hat{u}_m\,\hat{\nabla}_i\hat{v}^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i \tag{4.4.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i - \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\,\hat{\nabla}) \\ &= \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i - \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} - \hat{u}^m\hat{d}_{im} + \hat{u}^m\hat{\Omega}_{im}\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

注意易证因为旋率 $\boldsymbol{\Omega}$ 是反对称张量,对任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 都有类似于式(4.3.18b)的关系

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} \tag{4.4.6}$$

旋率张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 与角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系见式(4.3.17)。

式(4.4.2)和式(4.4.4)是同一个矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 对不同基矢量的分解式,所以分量之间必满足指标升降关系

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^i &= \hat{g}^{ij}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} - \hat{u}_m\,\hat{\nabla}_j\hat{v}^m\right) \\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} - \hat{u}_m\,\hat{\nabla}_i\hat{v}^m &= \hat{g}_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^j\right)\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

下面直接证明该式。在证明时应注意,虽然

$$\hat{u}^i = \hat{g}^{ij}\hat{u}_j$$
$$\hat{u}_i = \hat{g}_{ij}\hat{u}^j$$

但是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t} &\neq \hat{g}^{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} &\neq \hat{g}_{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{4.4.7a}$$

这是因为在 Lagrange 坐标系中,度量张量的分量是随 t 变化的,$\frac{\mathrm{d}\hat{g}^{ij}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ 或 $\frac{\mathrm{d}\hat{g}_{ij}}{\mathrm{d}t} \neq 0$,因此求导时出现两项,利用式(4.3.7a),可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} &= \hat{g}_{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{g}_{ij}}{\mathrm{d}t}\hat{u}^j \\ &= \hat{g}_{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t} + (\hat{\nabla}_j\hat{v}^k)\hat{g}_{ik}\hat{u}^j + (\hat{\nabla}_i\hat{v}^m)\hat{g}_{mj}\hat{u}^j \\ &= \hat{g}_{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t} + \hat{g}_{ij}\hat{u}^m(\hat{\nabla}_m\hat{v}^j) + \hat{u}_m(\hat{\nabla}_i\hat{v}^m)\end{aligned}$$

将上式移项，便可证得式(4.4.7)的第二式。类似地也可证明式(4.4.7)的第一式。

矢量场物质导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$式(4.4.3)和式(4.4.5)的右端各包含三项。其中第一项表示基矢量不变时，即不考虑所研究质点邻域内介质的变形和转动(但可以有刚体平移)时，矢量分量u^i或u_i的变化率；第二项表示由介质变形引起的矢量的变化率；第三项表示由介质微元作刚体转动所引起的矢量变化率。两式左端是同一个矢量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$，右端的第三项也是同一个矢量$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$，所以两式右端第一、第二项之和也应是同一个矢量，即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i-\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u}\tag{4.4.8}$$

再注意到上式两边的第二项都是矢量，所以两边的第一项也是矢量，但一般说并不相等。因此由上式可得

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i+2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i$$

当介质有变形时，$\boldsymbol{d}\neq 0$，两个第一项就不可能相等。

其实，把式(4.4.5)的第一项改写一下，再利用式(4.4.7a)也可证明这一点

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i=\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^j=\hat{g}^{ij}\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\neq\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i$$

可见这是两个不同的矢量，不能混淆。

4.4.2 Euler 坐标系中矢量场函数的物质导数·全导数

质点的 Euler 坐标是该质点的 Lagrange 坐标ξ^i和参数t的函数，即

$$x^k=x^k(\xi^j,t)$$

故矢量$\boldsymbol{u}$在 Euler 坐标系中的分解式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=u^i(x^k(\xi^j,t),t)\boldsymbol{g}_i(x^k(\xi^j,t))\\&=u_i(x^k(\xi^j,t),t)\boldsymbol{g}^i(x^k(\xi^j,t))\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

对上式的第一式求物质导数，记做$\dot{\boldsymbol{u}}$，并利用式(4.3.22)得

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i+u^m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_m}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}+u^m v^k\Gamma^i_{km}\right)\boldsymbol{g}_i\tag{4.4.10}$$

这和式(4.1.7)形式相同，区别仅在于式(4.1.7)研究的是一个质点上的矢量$\boldsymbol{u}$，而这里研究的是连续介质中任何一个确定的质点上的矢量$\boldsymbol{u}$，因此这里的ξ^i可以取不同的值。如果把矢量$\boldsymbol{u}$对 Euler 基矢量分解时所得的分量u^i简称为 Euler 分量，则和式(4.1.8)相似，可以定义

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}+u^m v_k\Gamma^i_{km}\tag{4.4.11}$$

为矢量 Euler 分量u^i对参数t的**全导数**。于是式(4.4.10)可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i\tag{4.4.12}$$

即矢量 Euler 分量的全导数等于矢量物质导数的 Euler 分量，或简称为全导数是物质导数的 Euler 分量。

全导数式(4.4.11)中的第一项$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$是$\boldsymbol{u}$的 Euler 分量$u^i(\xi^j,t)$的物质导数，求导时质点$\xi^i$保持不变。也可以把$u^i$表示成 Euler 坐标$x^k$和$t$的函数，即$u^i(x^k,t)$。应该指出，$u^i(x^k,t)$

与 $u^i(\xi^j,t)$ 并不是同一个函数，它们之间可以利用坐标转换关系式(4.2.13) 进行转换，即 $u^i(x^k,t) = u^i(x^k(\xi^j,t),t)$。将右端重新整理后，得到 u^i 是 ξ^i 与 t 的另一形式的函数 $f^i(\xi^j,t)$。对运动质点来说，其 Euler 坐标 $x^k(\xi^j,t)$ 是随时间而变化的，如果先把 x^k 暂时固定，则总变化率 $\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$ 应等于固定空间点位 x^k 处 u^i 的变化率和由于质点迁移到另一个相邻空间点位而引起的 u^i 的变化率之和，即(利用式(4.2.17a))

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} + \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)_{\xi^j} \\ &= \left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} + v^k\frac{\partial u^i}{\partial x^k} \qquad (4.4.13a)\end{aligned}$$

上式中三个偏导数的含义是

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} = \frac{\partial u^i(x^k,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} = \frac{\partial u^i(x^k,t)}{\partial x^k}$$

$$\left(\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \frac{\partial x^k(\xi^j,t)}{\partial t} = v^k$$

把式(4.4.13a) 代入式(4.4.11)，并利用协变导数的定义式(3.3.15a)，则全导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t} &= \left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} + v^k\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + u^m\Gamma^i_{km}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} + v^k(\nabla_k u^i) \qquad (4.4.13)\end{aligned}$$

其中第一项称为**局部导数**。它是观察者站在固定空间点位 x^k 处所观察到的矢量分量 u^i 的变化速率。引起这种变化的原因是由于介质在运动，不同时刻 t 通过同一空间点位 x^k 的物质质点是不同的，而矢量场 $\boldsymbol{u}$ 又是随质点而异的，所以观察者看到的是定义在不同质点上的不同矢量 $\boldsymbol{u}$；第二项称为**迁移导数**，它反映了当运动质点迁移到相邻的另一空间点位时，矢量分量 u^i 的变化速率。

若对式(4.4.9) 的第二式求物质导数，利用式(4.3.23)，则与式(4.4.10) 相对照，得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} - u_m v^k\Gamma^m_{ki}\right)\boldsymbol{g}^i \qquad (4.4.14)$$

或写作

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}^i \qquad (4.4.15)$$

其中全导数

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - u_m v^k\Gamma^m_{ki} \qquad (4.4.16)$$

或(利用协变导数定义式(3.3.15b))

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{x^k} + v^k(\nabla_k u_i) \qquad (4.4.17)$$

其中第一项为**局部导数**。由于 $\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}$ 和 $\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}$ 是同一矢量 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 的协变、逆变分量，因此它们必须满足指标升降关系

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t} = g^{ij}\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t}$$
$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = g_{ij}\frac{\mathrm{D}u^j}{\mathrm{D}t} \tag{4.4.18}$$

再看式(4.4.17)和式(4.4.13)，两式右端第二项(迁移导数)是同一矢量$\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})$的协变、逆变分量，它们必满足指标升降关系。由此可知，第一项(局部导数)也一定是同一矢量。这一点也可这样来证明：矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量满足指标升降关系

$$u^i = g^{ij}u_j$$

对空间点位 x^k 来说，Euler 坐标系的度量张量 g^{ij} 是与 t 无关的，所以把上式对 t 求导得

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial t}\right)_{x^k} = g^{ij}\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)_{x^k}$$

即两个第一项满足指标升降关系，式(4.4.17)和式(4.4.13)两式右端第一项(局部导数)也是同一个矢量$\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{x^k}$的协变、逆变分量。以分量形式表示的式(4.4.12)、式(4.4.13)与式(4.4.15)、式(4.4.17)可以写成如下统一的矢量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{x^k} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{x^k} + (\boldsymbol{u}\,\nabla)\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.4.19}$$

其中第一项为**局部导数**。

应该指出，式(4.4.10)和式(4.4.14)右端的两项之和都等于同一个矢量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i + u^m v^k \Gamma^i_{km}\boldsymbol{g}_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}^i - u_m v^k \Gamma^m_{ki}\boldsymbol{g}^i \tag{4.4.20}$$

但上式中左端的第一项$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i$与右端的第一项$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}^i$都不是矢量(即对 Euler 坐标 x^k 的转换都不具有不变性)，而且互相也不相等，即

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_i \neq \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}^i$$

换言之，矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 Euler 分量 u^i 与 u_i 的物质导数$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$不满足在 Euler 坐标系中的指标升降关系。可以这样来证明：求$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$时，Lagrange 坐标 ξ^i 保持不变，而 Euler 坐标 x^k 是变化的，因此度量张量 $g^{ij}(x^k)$ 与 t 有关，于是

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g^{ij}u_j) \neq g^{ij}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}$$

既然式(4.4.20)中的两端第一项不是矢量，也不相等，所以两端的第二项也不可能是矢量，而且也不相等。

综上所述，矢量 $\boldsymbol{u}$ 的物质导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$是一个矢量；矢量 $\boldsymbol{u}$ 在 Euler 坐标系中的局部导数和迁移导数也都是矢量。矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 Lagrange 分量 $\hat{u}^i$ 和 $\hat{u}_i$ 的物质导数分别都是矢量，但不是同一个矢量。而矢量 $\boldsymbol{u}$ 的 Euler 分量 u^i 和 u_i 的物质导数不满足 Euler 坐标系中的指标升降关系，而且都不是矢量。

当然，$\boldsymbol{u}$ 可以代表任何矢量场。例如，如果 $\boldsymbol{u}$ 代表位移，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$就表示速度；如果 $\boldsymbol{u}$ 代表速

度，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$就表示加速度。

前面我们已经指出，Lagrange 坐标 ξ^i 一般只能是曲线坐标。采用 Euler 坐标系 x^i 的好处是可以采用笛卡尔直角坐标系，这样就可以免去曲线坐标系带来的许多麻烦。

4.4.3 坐标转换关系

把矢量的物质导数对 Lagrange 基矢量和 Euler 基矢量分解，由式(4.4.2)、式(4.4.4)、式(4.4.12)和式(4.4.15)得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m \hat{\nabla}_m \hat{v}^i\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} - \hat{v}^m \hat{\nabla}_i \hat{v}^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i$$

$$= \frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i = \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{g}^i \qquad (4.4.21)$$

对于确定的时刻 t，可以认为 x^i 与 ξ^i 是一种坐标变换。式(4.2.14)给出了相应基矢量的转换关系。代入上式后可得相应分量的如下转换关系

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m \hat{\nabla}_m \hat{v}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{D}u^j}{\mathrm{D}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} - \hat{u}_m \hat{\nabla}_i \hat{v}^m = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\frac{\mathrm{D}u_j}{\mathrm{D}t} \qquad (4.4.22\mathrm{a})$$

或反演成

$$\frac{\mathrm{D}u^i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}^j}{\mathrm{d}t} + \hat{u}^m \hat{\nabla}_m \hat{v}^j\right)$$

$$\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{u}_j}{\mathrm{d}t} - \hat{u}_j \hat{\nabla}_m \hat{v}^m\right) \qquad (4.4.22\mathrm{b})$$

对于小位移和小速度问题，右端括号中的第二项可以略去，对于一般情况则应保留。

如果矢量 $\boldsymbol{u}$ 就是速度场，则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$就是介质的加速度 $\boldsymbol{a}$，只要把上面公式中的 u^i 和 u_i 改成 v^i 和 v_i，就可以得到计算加速度的各种分量值。

4.4.4 矢量场函数的相对导数

有两种观察物理现象的方式。一种是观察者位于静止的空间坐标系中，观察矢量 $\boldsymbol{u}$ 随参数 t 的变化速率，这就称为**绝对导数**。另一种是观察者跟随活动坐标系一起运动和变形，观察矢量 $\boldsymbol{u}$ 随参数 t，相对于活动参考架的变化速率，这称为**相对导数**。

以理论力学中的刚体运动为例。设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为固定在空间的静止笛卡尔坐标系；$\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}}$ 为跟随刚体运动的活动笛卡尔坐标系，刚体(因而活动坐标系)在静止坐标系中的旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，如图 4－6 所示。

把矢量 $\boldsymbol{u}$ 对静止坐标系分解为

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$$

注意到 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是固定不变的，则 $\boldsymbol{u}$ 的绝对导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

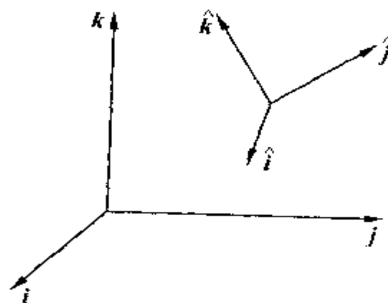


图 4－6 静参考系和动参考系

把矢量 $\boldsymbol{u}$ 对活动坐标系分解为

$$\boldsymbol{u} = \hat{u}_x\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{u}_y\hat{\boldsymbol{j}} + \hat{u}_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

注意到基矢量 $\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}}$ 是在(旋转)变化的,则 $\boldsymbol{u}$ 的绝对导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}\hat{u}_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}\hat{u}_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{k}} + \hat{u}_x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}_x}{\mathrm{d}t} + \hat{u}_y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}_x}{\mathrm{d}t} + \hat{u}_z\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}_x}{\mathrm{d}t} \tag{4.4.23a}$$

其中前三项不考虑基矢量的变化,是矢量 $\boldsymbol{u}$ 相对于由 $\hat{\boldsymbol{i}},\hat{\boldsymbol{j}},\hat{\boldsymbol{k}}$ 所组成的活动参考系的变化率,称为相对导数,并记为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_r = \frac{\mathrm{d}\hat{u}_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}\hat{u}_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\mathrm{d}\hat{u}_z}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{k}}$$

后三项来自基矢量的变化,利用著名的**泊桑公式**

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{k}}$$

可改写成

$$\hat{u}_x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t} + \hat{u}_y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t} + \hat{u}_z\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times(\hat{u}_x\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{u}_y\hat{\boldsymbol{j}} + \hat{u}_z\hat{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$$

它是观察者站在静止空间中观察到的、由于矢量 $\boldsymbol{u}$ 跟随活动参考系一起旋转而引起的矢量 $\boldsymbol{u}$ 的变化率,称为**牵连导数**。当观察者和活动参考系一起旋转时,牵连导数是感觉不到的。按式(4.4.23a),绝对导数就等于相对导数和牵连导数之和

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} \tag{4.4.23b}$$

对可变形的连续介质来说,物体不仅作刚体平移和旋转,而且还发生变形。前面已经讨论过矢量 $\boldsymbol{u}$ 的物质导数,它在 Lagrange 协变、逆变基中的分解式分别为式(4.4.3)和式(4.4.5)

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}^i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i + \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} \tag{4.4.24a}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i - \mathbf{d}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} \tag{4.4.24b}$$

式中,$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$。后两项考虑了 Lagrange 基矢量的变化而引起的全部影响,所以物质导数是静止空间中的观察者所看到的绝对导数。

4.5 张量场函数的导数

4.5.1 任意阶张量场函数的物质导数

为了讨论方便,我们以三阶张量 $\boldsymbol{T}$ 为例,自然也不难把它推广到任意阶张量中去。三阶张量 $\boldsymbol{T}$ 在 Lagrange 坐标系中的分解式为

$$\boldsymbol{T} = \hat{T}^{ijk}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}_k = \hat{T}^{ij}{}_{\cdot\cdot k}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}^k = \cdots = \hat{T}_{ijk}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j\hat{\boldsymbol{g}}^k \tag{4.5.1}$$

其中张量的 Lagrange 分量和 Lagrange 基矢量均是质点坐标 ξ^s 和时间 t 的函数，即

$$\hat{T}^{ijk} = \hat{T}^{ijk}(\xi^s, t), \cdots$$
$$\hat{\boldsymbol{g}}_i = \hat{\boldsymbol{g}}_i(\xi^s, t), \cdots$$

在 Euler 坐标系中 $\boldsymbol{T}$ 的分解式为

$$\boldsymbol{T} = T^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k = T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k = \cdots = T_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k \tag{4.5.2}$$

由于质点在运动，张量的 Euler 分量和 Euler 基矢量均通过变化着的质点 Euler 坐标 x^r 直接或间接地与参数 t 有关，即

$$\hat{T}^{ijk} = \hat{T}^{ijk}(x^r(\xi^s, t), t), \cdots$$
$$\hat{\boldsymbol{g}}_i = \hat{\boldsymbol{g}}_i(x^r(\xi^s, t), t), \cdots$$

对于三阶张量来说，式(4.5.1) 和式(4.5.2) 中各有 8 种不同的协变、逆变和混变的分解形式。对任意 n 阶张量则有 2^n 种不同的分解形式。

在某个确定的时刻 t，同一个张量的 Lagrange 分量和 Euler 分量间满足一定的转换关系。例如

$$\hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot c} = T^{ij}_{\cdot\cdot k}\frac{\partial \xi^a}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^c}$$
$$T^{ij}_{\cdot\cdot k} = \hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot c}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^b}\frac{\partial \xi^c}{\partial x^k} \tag{4.5.3}$$

显然这些转换关系是随参数 t 而变化的，即不同时刻对应着不同的转换关系。

利用 Lagrange 基矢量的物质导数公式(4.3.2) 和式(4.3.6)，张量 $\boldsymbol{T}$ 的物质导数在 Lagrange 坐标系中的分解式为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{T}^{ijk}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}_k) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}^k) = \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{T}_{ijk}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j\hat{\boldsymbol{g}}^k) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ijk}}{\mathrm{d}t} + \hat{T}^{mjk}\,\hat{\nabla}_m v^i + \hat{T}^{imk}\,\hat{\nabla}_m v^j + \hat{T}^{ijm}\,\hat{\nabla}_m v^k\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}_k \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} + \hat{T}^{mj}_{\cdot\cdot k}\,\hat{\nabla}_m v^i + \hat{T}^{im}_{\cdot\cdot k}\,\hat{\nabla}_m v^j - \hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot m}\,\hat{\nabla}_k v^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j\hat{\boldsymbol{g}}^k \\
&= \cdots \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}_{ijk}}{\mathrm{d}t} - \hat{T}_{mjk}\,\hat{\nabla}_i v^m - \hat{T}_{imk}\,\hat{\nabla}_j v^m - \hat{T}_{ijm}\,\hat{\nabla}_k v^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j\hat{\boldsymbol{g}}^k
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

上式共有 8 种分解形式，每种分解所得到的分量都满足指标升降关系，例如

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} + \hat{T}^{mj}_{\cdot\cdot k}\,\hat{\nabla}_m v^i + \hat{T}^{im}_{\cdot\cdot k}\,\hat{\nabla}_m v^j - \hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot m}\,\hat{\nabla}_k v^m \\
&= \hat{g}^{ir}\hat{g}^{js}\left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}_{rsk}}{\mathrm{d}t} - \hat{T}_{msk}\,\hat{\nabla}_r v^m - \hat{T}_{rmk}\,\hat{\nabla}_s v^m - \hat{T}_{rsm}\,\hat{\nabla}_k v^m\right)
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

但分量所含 4 项的每一项并不满足指标升降关系(类似矢量情况的式(4.4.7a))，例如

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} \neq \hat{g}^{ir}\hat{g}^{js}\frac{\mathrm{d}\hat{T}_{rsk}}{\mathrm{d}t} \tag{4.5.6}$$

类似于矢量场的全导数式(4.4.12)，张量 $\boldsymbol{T}$ 的物质导数在 Euler 坐标系中的分量称为张量分量的全导数。共有 8 种

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}T^{ijk}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k=\frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k=\cdots=\frac{\mathrm{D}T_{ijk}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k \tag{4.5.7}$$

其中,类似于矢量场的式(4.4.11)与式(4.4.16),有

$$\frac{\mathrm{D}T^{ijk}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{d}T^{ijk}}{\mathrm{d}t}+T^{mjk}v^n\Gamma^i_{nm}+T^{imk}v^n\Gamma^j_{nm}+T^{ijm}v^n\Gamma^k_{nm}$$

$$\frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{d}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t}+T^{mj}_{\cdot\cdot k}v^n\Gamma^i_{nm}+T^{im}_{\cdot\cdot k}v^n\Gamma^j_{nm}-T^{ij}_{\cdot\cdot m}v^n\Gamma^m_{nk}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{D}T_{ijk}}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{d}T_{ijk}}{\mathrm{d}t}-T_{mjk}v^n\Gamma^m_{ni}-T_{imk}v^n\Gamma^m_{nj}-T_{ijm}v^n\Gamma^m_{nk} \tag{4.5.8}$$

8种全导数之间互相满足指标升降关系,但在式(4.5.8)右端的4项中,各项分别都不是张量,都不满足指标升降关系。

把式(4.5.8)中的第一项按复合函数求导规则化为(以$\frac{\mathrm{d}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t}$为例)

$$\frac{\mathrm{d}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\left(\frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial t}\right)_{x^m}+\frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial x^n}v^n$$

则类似于矢量场的式(4.4.13)和式(4.4.17),全导数可写成

$$\frac{\mathrm{D}T^{ijk}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial T^{ijk}}{\partial t}\right)_{x^m}+v^n\ \nabla_nT^{ijk}=\left(\frac{\partial T^{ijk}}{\partial t}\right)_{x^m}+T^{ijk}_{,n}v^n$$

$$\frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial t}\right)_{x^m}+v^n\ \nabla_nT^{ij}_{\cdot\cdot k}=\left(\frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial t}\right)_{x^m}+T^{ij}_{\cdot\cdot k,n}v^n$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{D}T_{ijk}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial T_{ijk}}{\partial t}\right)_{x^m}+v^n\ \nabla_nT_{ijk}=\left(\frac{\partial T_{ijk}}{\partial t}\right)_{x^m}+T_{ijk,n}v^n \tag{4.5.9}$$

共有8个这样的式子。其中右端的第一项称为局部导数,第二项称为迁移导数。和矢量场一样,这两项分别都是张量,因而分别满足指标升降关系。类似于矢量场的式(4.4.19),式(4.5.7)和式(4.5.9)也可写成张量形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t}\right)_{x^m}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{T})=\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t}\right)_{x^m}+(\boldsymbol{T}\ \nabla)\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.5.10}$$

其中第一项为局部导数。

类似于矢量场的式(4.4.22a)与式(4.4.22b),在确定的时刻t,张量物质导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}$的Lagrange分量和Euler分量之间满足转换关系,例如

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot c}}{\mathrm{d}t}+\hat{T}^{mb}_{\cdot\cdot c}\ \hat{\nabla}_m\hat{v}^a+\hat{T}^{am}_{\cdot\cdot c}\ \hat{\nabla}_m\hat{v}^b-\hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot m}\ \hat{\nabla}_c\hat{v}^m=\frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\xi^c}$$

$$\frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot c}}{\mathrm{d}t}+\hat{T}^{mb}_{\cdot\cdot c}\ \hat{\nabla}_m\hat{v}^a+\hat{T}^{am}_{\cdot\cdot c}\ \hat{\nabla}_m\hat{v}^b-\hat{T}^{ab}_{\cdot\cdot m}\ \hat{\nabla}_c\hat{v}^m\right)\frac{\partial x^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial x^j}{\partial\xi^b}\frac{\partial\xi^c}{\partial x^k} \tag{4.5.11}$$

应用这种转换关系的一个例子如下。设在某时刻t,选Lagrange坐标和Euler坐标为同一个坐标(例如,在$t=0$时刻,两个坐标系都采用笛卡尔坐标系),则在该时刻t有

$$\xi^i=x^i,\quad \hat{\boldsymbol{g}}_i=\boldsymbol{g}_i \tag{4.5.12a}$$

代入式(4.5.3)后得

$$\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}=T^{ij}_{\cdot\cdot k} \tag{4.5.12b}$$

即张量的两种分量在 t 时刻是相等的。当 t 增加到 $t+\mathrm{d}t$ 时，质点的 Lagrange 坐标值 ξ^i 保持不变，而其 Euler 坐标值 x^i 将因质点运动而变化；另一方面，Lagrange 基矢量 $\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 将因物体的变形和旋转而发生变化，而 Euler 基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 将因另一个原因，即质点运动到另一个空间位置，而发生变化。所以式(4.5.12a) 在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻已不再成立。代入式(4.5.3) 后可知

$$\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}(t+\mathrm{d}t) \neq T^{ij}_{\cdot\cdot k}(t+\mathrm{d}t)$$

因而张量的两种分量在 t 时刻的变化率并不相等，即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t}$$

它们之间的关系可由式(4.5.10) 导出。在该 t 时刻由式(4.5.12a)

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^i} = \delta^a_i$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} = \delta^i_a \tag{4.5.13a}$$

且

$$\hat{\nabla}_m \hat{v}^i = \nabla_m v^i \tag{4.5.13b}$$

将此代入式(4.5.11)，移项，并利用式(4.5.12) 得到在该 t 时刻

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{D}t} - T^{mj}_{\cdot\cdot k}\nabla_m v^i - T^{im}_{\cdot\cdot k}\nabla_m v^j + T^{ij}_{\cdot\cdot m}\nabla_k v^m \tag{4.5.14}$$

把式(4.5.8) 代入，并注意到式(3.3.15a) 则

$$\nabla_m v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^m} + v^n \Gamma^i_{mn}$$

$$\nabla_k v^m = \frac{\partial v^m}{\partial x^k} + v^n \Gamma^m_{kn}$$

上式可进一步化为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\mathrm{d}t} - T^{mj}_{\cdot\cdot k}\frac{\partial v^i}{\partial x^m} - T^{im}_{\cdot\cdot k}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} + T^{ij}_{\cdot\cdot m}\frac{\partial v^m}{\partial x^k} \tag{4.5.15}$$

4.5.2 二阶张量场函数的物质导数

下面对最常用的二阶张量场作进一步的讨论。二阶张量场 $\boldsymbol{H}$ 在 Lagrange 坐标系和 Euler 坐标系中的分解式分别为

$$\boldsymbol{H} = \hat{h}^{ij}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j = \hat{h}^i_{\cdot j}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j = \hat{h}_i^{\cdot j}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}_j = \hat{h}_{ij}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j \tag{4.5.16}$$

$$\boldsymbol{H} = h^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = h^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = h_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = h_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{4.5.17}$$

把 $\boldsymbol{H}$ 的物质导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}$ 记做 $\dot{\boldsymbol{H}}$，由式(4.5.4)，它在 Lagrange 坐标系中的分解式为

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{h}^{ij}}{\mathrm{d}t} + \hat{h}^{mj}\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^i + \hat{h}^{im}\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^j\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{h}^i_{\cdot j}}{\mathrm{d}t} + \hat{h}^m_{\cdot j}\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^i - \hat{h}^i_{\cdot m}\,\hat{\nabla}_j\hat{v}^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{h}_i^{\cdot j}}{\mathrm{d}t} - \hat{h}_m^{\cdot j}\,\hat{\nabla}_i\hat{v}^m + \hat{h}_i^{\cdot m}\,\hat{\nabla}_m\hat{v}^j\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}_j \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\hat{h}_{ij}}{\mathrm{d}t} - \hat{h}_{mj}\,\hat{\nabla}_i\hat{v}^m + \hat{h}_{im}\,\hat{\nabla}_j\hat{v}^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j
\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

如前式(4.5.5)所述，以上4种分量作为整体是满足指标升降关系的。但括号中的每个对应分项之间并不满足指标升降关系。由式(4.5.7)、式(4.5.8)和式(4.5.9)，物质导数 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 在 Euler 坐标系中的分量称为全导数，即

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}h^{ij}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \frac{\mathrm{D}h^{i}{}_{\cdot j}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = = \frac{\mathrm{D}h_i{}^{\cdot j}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = = \frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{4.5.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}h^{ij}}{\mathrm{D}t} &= \left(\frac{\partial h^{ij}}{\partial t}\right)_{x^m} + v^n \nabla_n h^{ij} = \frac{\mathrm{d}h^{ij}}{\mathrm{d}t} + h^{mj}v^n\Gamma^i_{nm} + h^{im}v^n\Gamma^j_{nm} \\
\frac{\mathrm{D}h^{i}{}_{\cdot j}}{\mathrm{D}t} &= \left(\frac{\partial h^{i}{}_{\cdot j}}{\partial t}\right)_{x^m} + v^n \nabla_n h^{i}{}_{\cdot j} = \frac{\mathrm{d}h^{i}{}_{\cdot j}}{\mathrm{d}t} + h^{m}{}_{\cdot j}v^n\Gamma^i_{nm} - h^{i}{}_{\cdot m}v^n\Gamma^m_{nj} \\
\frac{\mathrm{D}h_i{}^{\cdot j}}{\mathrm{D}t} &= \left(\frac{\partial h_i{}^{\cdot j}}{\partial t}\right)_{x^m} + v^n \nabla_n h_i{}^{\cdot j} = \frac{\mathrm{d}h_i{}^{\cdot j}}{\mathrm{d}t} - h_m{}^{\cdot j}v^n\Gamma^m_{ni} + h_i{}^{\cdot m}v^n\Gamma^j_{nm} \\
\frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}t} &= \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\right)_{x^m} + v^n \nabla_n h_{ij} = \frac{\mathrm{d}h_{ij}}{\mathrm{d}t} + h_{mj}v^n\Gamma^m_{ni} - h_{im}v^n\Gamma^m_{nj}
\end{aligned} \tag{4.5.20}$$

上式中的三项，即全导数、局部导数和迁移导数都是张量，所以各项都分别满足指标升降关系。

物质导数是绝对导数，下面讨论相对导数。把式(4.5.18)用实体记法表示成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{H}}_{(1)} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}(\nabla\,\boldsymbol{v}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(2)} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{v}\,\nabla) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(3)} - (\nabla\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}(\nabla\,\boldsymbol{v}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(4)} - (\nabla\,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{v}\,\nabla)
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

其中

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}}_{(1)} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}^{ij}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}_j \\
\dot{\boldsymbol{H}}_{(2)} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}^{i}{}_{\cdot j}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j \\
\dot{\boldsymbol{H}}_{(3)} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}_i{}^{\cdot j}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}_j \\
\dot{\boldsymbol{H}}_{(4)} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}_{ij}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{g}}^i\hat{\boldsymbol{g}}^j
\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

式(4.5.22)是 $\dot{\boldsymbol{H}}_{(1)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}_{(2)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}_{(3)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}_{(4)}$ 的定义。它们表示当观察者在4种不同的参考架中所看到的张量相对于参考架的变化率。由于式(4.5.21)的4个式子中与速度梯度有关的后两项都是张量，但又互不相同，所以相对导数 $\dot{\boldsymbol{H}}_{(1)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}_{(2)}$，$\dot{\boldsymbol{H}}_{(3)}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}_{(4)}$ 是4个不同的张量。这类相对导数在 Euler 坐标系中的分解式记为

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}}_{(1)} &= \frac{\delta h^{ij}}{\delta t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j \\
\dot{\boldsymbol{H}}_{(2)} &= \frac{\delta h^{i}{}_{\cdot j}}{\delta t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j \\
\dot{\boldsymbol{H}}_{(3)} &= \frac{\delta h_i{}^{\cdot j}}{\delta t}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j
\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{(4)} = \frac{\delta h_{ij}}{\delta t}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{4.5.23}$$

代入式(4.5.21)，并将该式中的各项（$\boldsymbol{H}$ 的物质导数，及含速度梯度的项）也在 Euler 坐标系中分解，利用式(4.5.19)，移项后可得如下分量关系：

$$\begin{aligned}
\frac{\delta h^{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{D}h^{ij}}{\mathrm{D}t} - v^i_{\cdot,m}h^{mj} - h^{im}\nabla_m v^j \\
\frac{\delta h^i_{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{D}h^i_{\cdot j}}{\mathrm{D}t} - v^i_{\cdot,m}h^m_{\cdot j} + h^i_{\cdot m}v^m_{\cdot,j} \\
\frac{\delta h_i^{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{D}h_i^{\cdot j}}{\mathrm{D}t} + (\nabla_i v^m)h_m^{\cdot j} - h_i^{\cdot m}\nabla_m v^j \\
\frac{\delta h_{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}t} + (\nabla_i v^m)h_{mj} + h_{im}v^m_{\cdot,j}
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

式中两个记号 $\nabla_k v^i = v^i_{\cdot,k}$ 选用一个使得上式成对的哑指标紧紧相连。用全导数式(4.5.20)代入式(4.5.24)，还可得到

$$\begin{aligned}
\frac{\delta h^{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}h^{ij}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial v^i}{\partial x^m}h^{mj} - h^{im}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} \\
\frac{\delta h^i_{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}h^i_{\cdot j}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial v^i}{\partial x^m}h^m_{\cdot j} + h^i_{\cdot m}\frac{\partial v^m}{\partial x^j} \\
\frac{\delta h_i^{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}h_i^{\cdot j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v^m}{\partial x^i}h_m^{\cdot j} - h_i^{\cdot m}\frac{\partial v^j}{\partial x^m} \\
\frac{\delta h_{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}h_{ij}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v^m}{\partial x^i}h_{mj} + h_{im}\frac{\partial v^m}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

利用式(4.3.15)对速度梯度进行加法分解，式(4.5.21)可写成

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\boldsymbol{H}}_{(1)} + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\Omega}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(2)} + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\Omega}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(3)} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\Omega}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(4)} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\Omega})
\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

可以看到，以上 4 式中与旋转有关的第三项是同一张量，所以前两项之和也是 4 个互相相等的张量，称为 **Jaumann** 导数，记为 $\frac{\mathscr{D}\boldsymbol{H}}{\mathscr{D}t}$ 或 $\dot{\boldsymbol{H}}_J$，即

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}}_J = \frac{\mathscr{D}\boldsymbol{H}}{\mathscr{D}t} &= \dot{\boldsymbol{H}}_{(1)} + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(2)} + (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(3)} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d}) \\
&= \dot{\boldsymbol{H}}_{(4)} - (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{d})
\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

或

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{H}}_J = \frac{\mathscr{D}\boldsymbol{H}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\Omega} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{4.5.28}$$

它是当观察者跟随介质微元一起旋转但不一起变形时所看到的，张量 $\boldsymbol{H}$ 相对于以 $\boldsymbol{\Omega}$ 为旋率

（即以 $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度，见式(4.3.18b)）的刚性转动参考架的变化率，所以又称为物质共旋率。Jaumann 导数与坐标系旋转无关，是一种能反映张量客观性的导数，有较重要的应用。

把式(4.5.27) 对 Lagrange 基分解，利用式(4.5.22)，可得 Jaumann 导数的 Lagrange 分量

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathring{H}}{}^{ij}_{J} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}^{ij}}{\mathrm{d}t} + \hat{d}^{i}_{\cdot m}\hat{h}^{mj} + \hat{h}^{im}\hat{d}_{m}^{\cdot j} \\
\hat{\mathring{H}}{}^{i}_{J\cdot j} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}^{i}_{\cdot j}}{\mathrm{d}t} + \hat{d}^{i}_{\cdot m}\hat{h}^{m}_{\cdot j} - \hat{h}^{i}_{\cdot m}\hat{d}^{m}_{\cdot j} \\
\hat{\mathring{H}}{}_{Ji}^{\cdot j} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}_{i}^{\cdot j}}{\mathrm{d}t} - \hat{d}_{i}^{\cdot m}\hat{h}_{m}^{\cdot j} + \hat{h}_{i}^{\cdot m}\hat{d}_{m}^{\cdot j} \\
\hat{\mathring{H}}_{Jij} &= \frac{\mathrm{d}\hat{h}_{ij}}{\mathrm{d}t} - \hat{d}_{i}^{\cdot m}\hat{h}_{mj} - \hat{h}_{im}\hat{d}^{m}_{\cdot j}
\end{aligned}
\tag{4.5.29}
$$

把式(4.5.28) 对 Euler 基分解，利用式(4.5.19) 得 Jaumann 导数的 Euler 分量

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathscr{D}h^{ij}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\mathrm{D}h^{ij}}{\mathrm{D}t} - \Omega^{i}_{\cdot m}h^{mj} + h^{im}\Omega_{m}^{\cdot j} \\
\frac{\mathscr{D}h^{i}_{\cdot j}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\mathrm{D}h^{i}_{\cdot j}}{\mathrm{D}t} - \Omega^{i}_{\cdot m}h^{m}_{\cdot j} + h^{i}_{\cdot m}\Omega^{m}_{\cdot j} \\
\frac{\mathscr{D}h_{i}^{\cdot j}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\mathrm{D}h_{i}^{\cdot j}}{\mathrm{D}t} - \Omega_{i}^{\cdot m}h_{m}^{\cdot j} + h_{i}^{\cdot m}\Omega_{m}^{\cdot j} \\
\frac{\mathscr{D}h_{ij}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}t} - \Omega_{i}^{\cdot m}h_{mj} + h_{im}\Omega^{m}_{\cdot j}
\end{aligned}
\tag{4.5.30}
$$

把式(4.5.27) 对 Euler 基分解，移项后可得 $\dot{\boldsymbol{H}}_{(1)},\dot{\boldsymbol{H}}_{(2)},\dot{\boldsymbol{H}}_{(3)},\dot{\boldsymbol{H}}_{(4)}$ 的 Euler 分量

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta h^{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathscr{D}h^{ij}}{\mathscr{D}t} - d^{i}_{\cdot m}h^{mj} - h^{im}d_{m}^{\cdot j} \\
\frac{\delta h^{i}_{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathscr{D}h^{i}_{\cdot j}}{\mathscr{D}t} - d^{i}_{\cdot m}h^{m}_{\cdot j} + h^{i}_{\cdot m}d^{m}_{\cdot j} \\
\frac{\delta h_{i}^{\cdot j}}{\delta t} &= \frac{\mathscr{D}h_{i}^{\cdot j}}{\mathscr{D}t} + d_{i}^{\cdot m}h_{m}^{\cdot j} - h_{i}^{\cdot m}d_{m}^{\cdot j} \\
\frac{\delta h_{ij}}{\delta t} &= \frac{\mathscr{D}h_{ij}}{\mathscr{D}t} + d_{i}^{\cdot m}h_{mj} + h_{im}d^{m}_{\cdot j}
\end{aligned}
\tag{4.5.31}
$$

由于 Jaumann 导数是张量，它的 4 个 Lagrange 分量式(4.5.29) 或 4 个 Euler 分量式(4.5.30) 都分别互相满足指标升降关系，且对于确定的时刻 t，它的 Lagrange 分量和 Euler 分量之间满足如下转换关系

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathring{H}}{}^{ij}_{J} &= \frac{\partial\xi^{i}}{\partial x^{m}}\frac{\partial\xi^{j}}{\partial x^{n}}\frac{\mathscr{D}h^{mn}}{\mathscr{D}t}, &\quad \frac{\mathscr{D}h^{mn}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\partial x^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial x^{n}}{\partial\xi^{j}}\hat{\mathring{H}}{}^{ij}_{J} \\
\hat{\mathring{H}}{}^{i}_{J\cdot j} &= \frac{\partial\xi^{i}}{\partial x^{m}}\frac{\partial x^{n}}{\partial\xi^{j}}\frac{\mathscr{D}h^{m}_{\cdot n}}{\mathscr{D}t}, &\quad \frac{\mathscr{D}h^{m}_{\cdot n}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\partial x^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial\xi^{j}}{\partial x^{n}}\hat{\mathring{H}}{}^{i}_{J\cdot j} \\
\hat{\mathring{H}}{}_{Ji}^{\cdot j} &= \frac{\partial x^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial\xi^{j}}{\partial x^{n}}\frac{\mathscr{D}h_{m}^{\cdot n}}{\mathscr{D}t}, &\quad \frac{\mathscr{D}h_{m}^{\cdot n}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\partial\xi^{i}}{\partial x^{m}}\frac{\partial x^{n}}{\partial\xi^{j}}\hat{\mathring{H}}{}_{Ji}^{\cdot j} \\
\hat{\mathring{H}}_{Jij} &= \frac{\partial x^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial x^{n}}{\partial\xi^{j}}\frac{\mathscr{D}h_{mn}}{\mathscr{D}t}, &\quad \frac{\mathscr{D}h_{mn}}{\mathscr{D}t} &= \frac{\partial\xi^{i}}{\partial x^{m}}\frac{\partial\xi^{j}}{\partial x^{n}}\hat{\mathring{H}}_{Jij}
\end{aligned}
\tag{4.5.32}
$$

但式(4.5.31) 中的 $\frac{\delta h^{ij}}{\delta t},\cdots,\frac{\delta h_{ij}}{\delta t}$ 等并不是同一个张量的分量，所以不满足指标升降关系。

习 题 四

4.1　设 x_1, x_2, x_3 为 Euler 笛卡尔直角坐标系，故指标不分上下。$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为坐标方向单位矢量。已知位移场为 $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$，速度场为 $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$。试写出上述矢量场 $\boldsymbol{u}$ 对时间 t 的物质导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ 的分量表达式。

4.2　试写出题 4.1 在 Euler 笛卡尔直角坐标系中矢量场 $\boldsymbol{u}$ 对时间 t 的 Jaumann 导数 $\hat{\boldsymbol{u}}_J$ 的分量表达式。

4.3　试在球坐标系中直接用正交标准化基矢量的求导公式推导质点速度与加速度分量公式。

4.4　一端固定，长度为 l 的绳下端悬一质量为 m 的质点，以等角速度 $\dot{\varphi}$ 绕轴转动(如图 4 – 7)，绳索在运动过程中始终拉紧，即 $\dot{r} = \ddot{r} = 0$。

求：(1) 质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的逆变分量与物理分量(通过 $\dot{\varphi}$、$\dot{\theta}$ 与 $\ddot{\theta}$ 表达)。

(2) 当 θ 角增加至一定值时，$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$，问此时对应的 θ 角与 $\dot{\varphi}$ 的关系，及绳中张力 T。

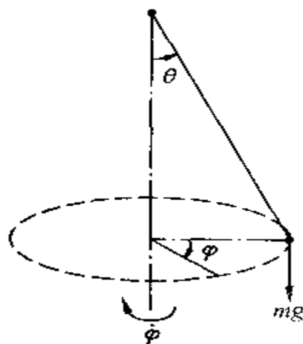


图 4 – 7

4.5　直接用正交标准化基矢量的求导公式，由式

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} \nabla + \nabla \boldsymbol{v})$$

导出圆柱坐标系中应变率张量 $\boldsymbol{d}$ 的分量通过速度分量的表达式。

4.6　试导出球坐标系中应变张量 $\boldsymbol{d}$ 的分量通过速度分量的表达式。

5　张量分析在线弹性理论中的应用

5.1　应力张量

5.1.1　应力矢量

力是矢量，在连续介质力学中，力矢不再是滑动矢量而是定位矢量。作用在连续介质所有体积元素上的力叫做**体积力**，例如重力和惯性力，常常用单位质量所受的力度量，记做 b_i；作用在面积元素上的力叫做**面积力**，这个面元可以是连续介质边界上的一部分，也可以是连续介质内部曲面上的一部分。面积力常常通过物体之间的接触产生。

为了描述面积力，必须引进应力矢量(或称表面牵引力)的概念。图 5－1 表示一连续介质材料，它占据空间 R。由于力从连续介质的一部分传递到另一部分，所以被曲面 S 包围的体积 V 内部的材料与该体积外部的材料在曲面 S 上相互作用着力。在 S 上取一点 P，面积微元 ΔS 包含于 S，且 ΔS 包含 P 点，$\boldsymbol{n}_i$ 是 S 在点 P 处的单位外法向矢量。于是体积 V 外部的材料经由 ΔS 对 V 内部的材料施加着面积力。这是一个复杂的分布力系，由理论力学中关于力系简化的理论，当向 P 点简化时，一般可以得到一个主矢和一个主矩。设主矢为 $\Delta \boldsymbol{f}_i$、主矩为 $\Delta \boldsymbol{M}_i$，如图5－1 所示。

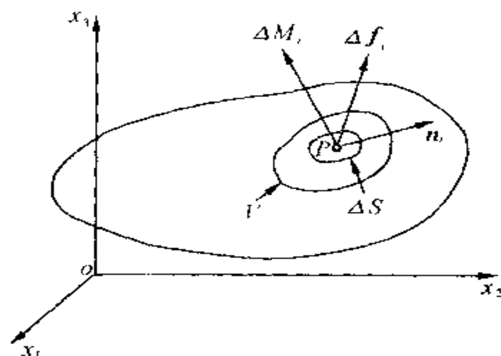


图 5－1　面积力

力元 $\Delta \boldsymbol{f}_i$ 除以 ΔS，称为作用在以 $\boldsymbol{n}$ 为外法向的面元 ΔS 上的平均应力矢量。当 ΔS 在点 P 处趋于零时，$\dfrac{\Delta \boldsymbol{f}_i}{\Delta S}$ 趋向于一个有限的极限 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}_i}{\mathrm{d}S}$。所得的矢量 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}_i}{\mathrm{d}S}$ 称为点 P 处具有法线 $\boldsymbol{n}$ 的面元上的**应力矢量**(或称**表面牵引力**)，记做 $t_i^{(n)}$，如图 5－2 所示。假如对 P 的主矩 $\Delta \boldsymbol{M}_i$ 除以 ΔS 再取极限时不等于零，则还应在该点定义一应力偶矢量 $\xi_i^{(n)}$。弹性理论中有一个分支研究这样的应力偶，在线弹性理论中不考虑应力偶。

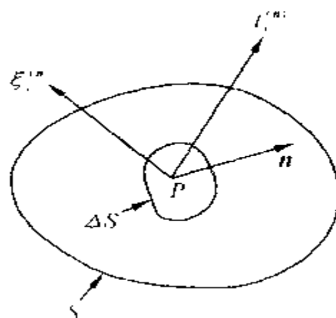


图 5－2　应力矢量

应力矢量可以这样来定义

$$t_i^{(n)} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ p \in \Delta S}} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}S} \tag{5.1.1a}$$

或

$$t^{(n)} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ p \in \Delta S}} \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S} \tag{5.1.1b}$$

采用记号 $t_i^{(n)}$（或 $t^{(n)}$）是为了强调这一事实，在连续介质中点 P 处的应力矢量明显地依赖于所取的无限小面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{n}$ 的朝向，因此必须标明单位外法向 $\boldsymbol{n}$。对于具有不同单位外法向的面元，在点 P 处相应的应力矢量一般说来将是不一样的。特别地，在点 P 处体积 V 内部的材料经由 ΔS 施加在外部材料上的应力矢量是 $t_i^{(n)}$，根据牛顿第三定律，我们得到

$$t_i^{(-n)} = -t_i^{(n)} \tag{5.1.2a}$$

或

$$t^{(n)} = -t^{(n)} \tag{5.1.2b}$$

5.1.2 应力张量

由前所述，应力矢量 $t_i^{(n)}$ 同单位外法向 $\boldsymbol{n}$ 有关，在这里 $\boldsymbol{n}$ 代表以点 P 为内点的无限小面元 $\mathrm{d}S$ 的朝向。我们定义：在点 P 处所有可能的 $\boldsymbol{n}$ 所对应的 $t_i^{(n)}$ 的全体，称为在该点处的应力状态。幸运的是不必一一说明每个外法向矢量所对应的应力矢量之后才能圆满地描述给定点处的应力状态，而只要用 3 个不共面的外法线方向的面元上的应力矢量就能完成这个任务。而且正巧构成一个二阶张量，这个二阶张量就叫做**应力张量**。

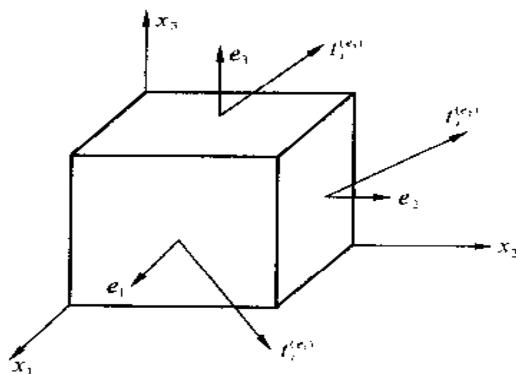


图 5-3 应力矢量在笛卡尔标架下的分解

下面我们就来逐步证实上述这一结论。

为方便起见，我们可以在笛卡尔坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中讨论。取以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为单位外法线的 3 个坐标平面上的应力矢量进行研究，如图 5-3 所示。3 个坐标平面上的每一个应力矢量都可按笛卡尔标架分解，并写成

$$\begin{aligned} t^{(e_1)} &= \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{12}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ t^{(e_2)} &= \sigma_{21}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ t^{(e_3)} &= \sigma_{31}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{5.1.3a}$$

或者用求和记法把 3 个式子统一写成

$$t^{(e_i)} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{5.1.3b}$$

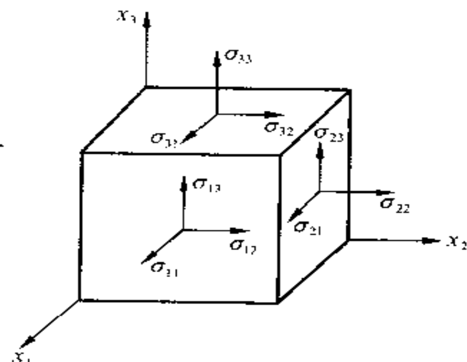


图 5-4 应力张量

我们把 9 个分量 σ_{ij} 称为**应力分量**。显然应力分量的第一个指标意味着有关应力矢量所在面元的朝向；第二个指标意味着有关应力矢量的第几个分量，如图 5-4 所示。图中画出的应力分量都是正的，也即按 σ_{ij} 全部大于零的情形画出的。我们常常把垂直于各面元的分量 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ 称为**正应力**；而把作用在面元内（即与面元相切）的那些分量 $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ 和 σ_{32} 叫做**剪应力**。

由式(5.1.2)立即可知，作用在以 $-\boldsymbol{e}_i$ 为外法

向的面元上的应力矢量，它们的分量正巧与相对应的以 $\boldsymbol{e}_i$ 为外法向的面元上的情形相反(一般画在图 5－4 中六面体的另外三个面元上，在此未画出)。由此可见，若 $\sigma_{11}>0$，意味着在点 P 处在 x_1 坐标轴方向是受拉的，反之受压。对于 σ_{22}，σ_{33} 有相类似的结论。

下面我们证明9个应力分量 σ_{ij} 构成一个二阶笛卡尔张量，它就是所谓的应力张量，记做 $\boldsymbol{\Sigma}$，且有

$$\boldsymbol{\Sigma}=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.1.4a}$$

或者直接写成下面的方阵形式

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{5.1.4b}$$

现在我们考察 P 点处任意面元上的应力矢量与 σ_{ij} 的关系，这可以通过作用在小四面体上的力的平衡来建立它们之间的关系。取四面体的顶点为 P，底面 ABC 垂直于 n_i，其他 3 个面垂直于坐标轴，如图 5－5 所示。

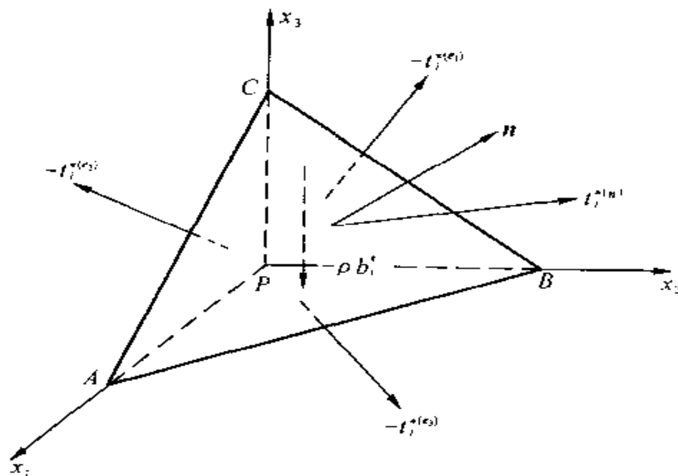


图 5－5　微元四面体上力的平衡

设底面 ABC 的面积为 $\mathrm{d}S$，则其他 3 个面的面积是底面积的投影，即对于面元 CPB 有 $\mathrm{d}S_1=\mathrm{d}Sn_1$；对于面元 APC 有 $\mathrm{d}S_2=\mathrm{d}Sn_2$；对于面元 BPA 有 $\mathrm{d}S_3=\mathrm{d}Sn_3$。或者写成统一的形式

$$\mathrm{d}S_i=\mathrm{d}S\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i=n_i\mathrm{d}S \tag{5.1.5}$$

作用在坐标面上的平均牵引力矢量为 $-t_i^{*(e_j)}$，作用在底面上的平均牵引力矢量为 $t_i^{*(n)}$，作用在四面体上的体积力为 ρb_i^*(包括惯性力，如果它存在的话)，其中 ρ 是密度，都表示在图 5－5 中。在四面体上力的平衡要求

$$t_i^{*(n)}\mathrm{d}S-t_i^{*(e_1)}\mathrm{d}S_1-t_i^{*(e_2)}\mathrm{d}S_2-t_i^{*(e_3)}\mathrm{d}S_3+\rho b_i^*\,\mathrm{d}V=0 \tag{5.1.6}$$

现在，使底面向 P 点收缩并保持垂直于 n_i，由于在小尺度中体积力与面积力相比较是较高阶

小量,故在这一极限过程中体积力趋于零。同时平均应力矢量 $t_i^{*(e_j)}$ 趋向于点 P 处的应力矢量 $t_i^{(e_j)}$。因此,在这一极限过程中,并把式(5.1.5) 代入后,式(5.1.6) 化为

$$t_i^{(n)} = t_i^{(e_1)}n_1 + t_i^{(e_2)}n_2 + t_i^{(e_3)}n_3 = t_i^{(e_j)}n_j$$

注意到 $t_i^{(e_j)} = \sigma_{ij}$,因此最终化为

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j \tag{5.1.7a}$$

或

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \tag{5.1.7b}$$

注意,在此我们假定 $\boldsymbol{\Sigma}$ 确是一个二阶张量,其后面一个式子的有效性稍后将得到证明。在具体计算时,可采用下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} & t_2^{(n)} & t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{5.1.7c}$$

式中,矩阵$[\sigma_{ij}]$就是应力张量$\boldsymbol{\Sigma}$ 在基$\boldsymbol{e}_i$ 下所对应的矩阵。

式(5.1.7) 表明,过 P 点的任意面元上的应力矢量都可用式(5.1.7) 算出,也即点 P 处的应力状态确实只要知道 3 个不共面的外法线方向的面元上的应力矢量就完全确定了。

为了证明9个应力分量 σ_{ij} 确实是个二阶张量,必须考虑坐标变换,看看它们是否满足张量的变换规则。

设在基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 下点P 处的9个应力分量为 σ_{ij},再取一组新的笛卡尔基矢量 $\boldsymbol{e}'_i$,相应的9个应力分量是 σ'_{ij}。按定义,σ'_{ij} 是点 P 处以 $\boldsymbol{e}'_i$ 为外法向的面元上的应力矢量在自身坐标系 $\boldsymbol{e}'_i$ 下的分量的全体,即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}^{(e'_1)} &= \sigma'_{11}\boldsymbol{e}'_1 + \sigma'_{12}\boldsymbol{e}'_2 + \sigma'_{13}\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{t}^{(e'_2)} &= \sigma'_{21}\boldsymbol{e}'_1 + \sigma'_{22}\boldsymbol{e}'_2 + \sigma'_{23}\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{t}^{(e'_3)} &= \sigma'_{31}\boldsymbol{e}'_1 + \sigma'_{32}\boldsymbol{e}'_2 + \sigma'_{33}\boldsymbol{e}'_3 \end{aligned} \tag{5.1.8a}$$

或者写成统一的表达式

$$\boldsymbol{t}^{(e'_i)} = \sigma'_{ij}\boldsymbol{e}'_j \tag{5.1.8b}$$

设老坐标系 $ox_1x_2x_3$ 与新坐标系 $ox'_1x'_2x'_3$ 之间的坐标变换是

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(5.1.9a)

或者用等价的关系式,即用变换矩阵

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{5.1.9b}$$

表示两者的联系。

根据式(5.1.7),分别先取 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$,则显然有

$$t_q^{(e_1')} = a_{1p}\sigma_{pq}$$
$$t_q^{(e_2')} = a_{2p}\sigma_{pq} \tag{5.1.10a}$$
$$t_q^{(e_3')} = a_{3p}\sigma_{pq}$$

把它们写成统一的矢量形式,则有

$$\boldsymbol{t}^{(e_i')} = a_{ip}\sigma_{pq}\boldsymbol{e}_q \tag{5.1.10b}$$

这就是应力矢量 $\boldsymbol{t}^{(e_i')}$ 在老坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中的分量表示式。再把它回到在新坐标系 $ox_1'x_2'x_3'$ 中的分量表示式,由于 $\boldsymbol{e}_q = a_{jq}\boldsymbol{e}'_j$,所以

$$\boldsymbol{t}^{(e_i')} = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}\boldsymbol{e}_j' \tag{5.1.10c}$$

对照式(5.1.8b) 与式(5.1.10c),我们立即得到

$$\sigma_{ij}' = a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq} \tag{5.1.11}$$

这正是二阶笛卡尔张量的变换规则。由此证实,任一点 P 处的应力状态可以用一个二阶张量来表示,我们把它称为应力张量,记做 $\boldsymbol{\Sigma}$。它的不变性记法就是前面的式(5.1.4a),有时为方便起见也用式(5.1.4b) 表示。它在坐标系 $ox_1x_2x_3$ 中对应的矩阵记做 $\boldsymbol{\Sigma}$,则有

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{5.1.12}$$

相应地 $\boldsymbol{\Sigma}$ 在坐标系 $ox_1'x_2'x_3'$ 中的对应矩阵记做 $\boldsymbol{\Sigma}'$,则有

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{bmatrix}$$

于是式(5.1.11) 可用等价的矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{A\Sigma A}^{\mathrm{T}} \tag{5.1.13}$$

由于 σ_{ij} 已被确定为二阶张量,所以式(5.1.7b) 就有效了。

5.1.3 力的平衡和力矩平衡·应力张量的对称性

考虑连续介质中任意体积 V 的平衡问题,设这部分连续介质受到表面牵引力 $t_i^{(n)}$(作用在包围 V 的曲面 S 上) 和体积力 ρb_i(包括惯性力,如果它存在的话) 的作用,其中 ρ 为密度,参看图 5-6,则 $t_i^{(n)}$ 和 ρb_i 的全体构成一个力系。当平衡时,要求该力系的合力和合力矩为零。合力等于零导致面积分和体积分之和的关系式为

$$\int_S t_i^{(n)}\mathrm{d}S + \int_V \rho b_i\mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.14a}$$

或

$$\int_S \boldsymbol{t}^{(n)}\mathrm{d}S + \int_S \rho\boldsymbol{b}\mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.14b}$$

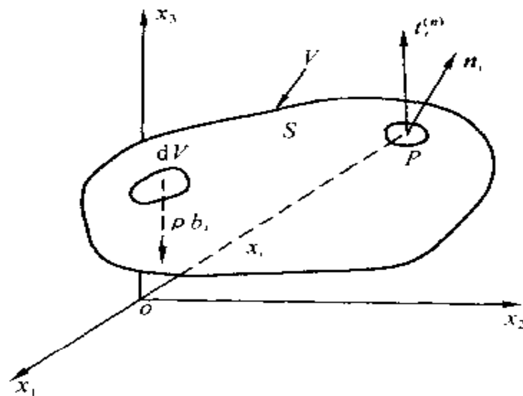


图 5-6 力的平衡和力矩的平衡

用 $\sigma_{ji}n_j$ 代替 $t_i^{(n)}$,并利用高斯散度定理把曲面积分转化为体积分,方程式(5.1.14)

变成

$$\int_S (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.15a}$$

或

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b}) \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.15b}$$

由于体积 V 是任取的,故上式中的被积函数必须等于零,由此得

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0 \tag{5.1.16a}$$

或

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} = 0 \tag{5.1.16b}$$

式(5.1.16) 就是所谓的**平衡方程**。

合力矩等于零导致力系关于坐标原点 o 的力矩之和等于零,即得

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} \mathrm{d}S + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.17a}$$

或

$$\int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^{(n)} \mathrm{d}S + \int_V \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{b} \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.17b}$$

式中 $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$ 表示位置矢量,今后我们都用 $\boldsymbol{x}$ 而不再用 $\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量了。再用 $t_k^{(n)} = \sigma_{pk} n_p$ 代入,并利用高斯散度定理,得到

$$\int_V [(\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} + \varepsilon_{ijk} x_j b_k \rho] \mathrm{d}V = 0$$

展开微分运算,并考虑到式(5.1.16),即得

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.18a}$$

或

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{d}V = 0 \tag{5.1.18b}$$

同样由于体积 V 是任意的,故有

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \tag{5.1.19a}$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Sigma} = 0 \tag{5.1.19b}$$

式(5.1.19) 表明

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

合并起来可表示为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{5.1.20}$$

这表明应力张量是对称的。鉴于式(5.1.20),平衡方程写为

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \tag{5.1.21a}$$

按展开的形式,我们有

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+\rho b_1=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}+\rho b_2=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho b_3=0 \tag{5.1.21b}$$

值得指出，应力张量的对称性是在不考虑应力偶矢量或分布体积矩的条件下得到的，也就是说，当存在应力偶矢量或分布体积矩时，由于合力矩中必须增加相应的附加项，因此得不到 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，也即此时应力张量不再是对称的了。这样，在材料力学和弹性力学中广泛使用的剪应力互等定理也不复存在了。

5.1.4 应力张量的性质

由于在线弹性理论中不考虑应力偶矢量和分布体积矩，所以应力张量是对称的，于是应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 便具有二阶对称张量的一切性质。根据二阶对称张量的性质可知，应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 必存在3个实的主值；必存在3个相互垂直的主方向，根据这3个主方向可以构成主轴系；在主轴系中，应力张量具有最简单的对角形形式，且对角线上的3个分量正是它的3个主值。

在点 P 处应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的主值和主方向是这样确定的。设已知点 P 处的应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$，求它的主值和主方向就是要求这样的应力矢量 $\boldsymbol{t}_i^{(n)}$，使得它的方向与所作用的面元的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 相重合（从应力的角度来看，就是在以 $\boldsymbol{n}$ 为外法向的面元上只有正应力而没有剪应力），也即

$$\boldsymbol{t}^{(n)}=\sigma\boldsymbol{n} \tag{5.1.22a}$$

或者写成分量形式

$$(\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij})n_i=0 \tag{5.1.22b}$$

欲得出 n_i 的非零解，必须使式(5.1.22b)的系数行列式等于零，从而变成求 Σ 的对应矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值

$$\begin{vmatrix}\sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma\end{vmatrix}=0 \tag{5.1.23a}$$

展开行列式即得 σ 的三次多项式

$$\sigma^3-\mathrm{I}_\Sigma\sigma^2+\mathrm{II}_\Sigma\sigma-\mathrm{III}_\Sigma=0 \tag{5.1.23b}$$

其中

$$\mathrm{I}_\Sigma=\sigma_{ii}=\mathrm{tr}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$\mathrm{II}_\Sigma=\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}-\sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$\mathrm{III}_\Sigma=\det\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.1.24}$$

分别把它们叫做**第一、第二和第三应力主不变量**。

式(5.1.23)的3个根叫做**主应力**，记做 $\sigma_{(1)},\sigma_{(2)},\sigma_{(3)}$。每个主应力有一个应力主方向，该方向的方向余弦 $n_j^{(k)}$ 是下列方程的非零解

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)}=0 \tag{5.1.25a}$$

或

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \sigma_{(k)}\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{n}^{(k)} = 0 \tag{5.1.25b}$$

注意，式(5.1.25)中用圆括号括出的字母下标或上标仅仅是个记号，不作求和运算。例如，对第二个主应力所对应的主方向 $n_j^{(2)}$ 来说，式(5.1.25)的展开式是

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_{(2)})n_1^{(2)} + \sigma_{12}n_2^{(2)} + \sigma_{13}n_3^{(2)} &= 0\\ \sigma_{21}n_1^{(2)} + (\sigma_{22} - \sigma_{(2)})n_2^{(2)} + \sigma_{23}n_3^{(2)} &= 0\\ \sigma_{31}n_1^{(2)} + \sigma_{32}n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_{(2)})n_3^{(2)} &= 0\end{aligned} \tag{5.1.25c}$$

前面已经讲过，它们总可以选出3个相互垂直的主方向，沿着这些方向构成主轴系 $Px_1^* x_2^* x_3^*$（在此不写成 $ox_1^* x_2^* x_3^*$，应理解为把笛卡尔坐标系平行移动到所考虑的点 P 处，原因是不同点处的主轴系一般是不相同的，因此这个主坐标系只适用于点 P），常常称它为点 P 处的**应力主轴系**，简称**主轴系**，在主轴系中应力张量所对应的矩阵是对角阵，记做 $\boldsymbol{\Sigma}^*$，即有

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \begin{bmatrix}\sigma_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{(3)}\end{bmatrix} \tag{5.1.26}$$

例 5.1 设点 P 处的应力张量为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}$$



试求：

(1) P 处垂直于 x_1 轴平面上的牵引力；

(2) P 处外法线为$(1,-1,2)$的平面上的牵引力；

(3) P 处平行于平面 $2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ 的平面上的牵引力及它的法向分量；

(4) P 处的主应力及应力主轴。

解 (1) 垂直于 x_1 轴平面的单位法线是$(\pm 1,0,0)$，今取正号，即$(1,0,0)$。所以牵引力为

$$[\boldsymbol{t}^{(e_1)}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

或者写成

$$\boldsymbol{t}^{(e_1)} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

(2) 单位法向是

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

因此

$$\begin{bmatrix}t_1^{(n)}\\ t_2^{(n)}\\ t_3^{(n)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}5\\ 10\\ -1\end{bmatrix}$$

或者写成

$$t_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(5\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)$$

(3) 单位法向是

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\text{或者其相反方向}$$

因此

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

或者写成

$$\boldsymbol{t}^{(n)} = \frac{1}{3}(-5\boldsymbol{e}_1 - 10\boldsymbol{e}_2 - 7\boldsymbol{e}_3)$$

它的法向分量为

$$\begin{aligned} \sigma_N = \boldsymbol{t}^{(n)} \cdot \boldsymbol{n} &= \frac{1}{3}(-5\boldsymbol{e}_1 - 10\boldsymbol{e}_2 - 7\boldsymbol{e}_3) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{3} + \frac{20}{3} + \frac{17}{3}\right) = \frac{17}{9} \end{aligned}$$

(4) 要求主应力,即要解特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\sigma & 2 & 3 \\ 2 & 4-\sigma & 6 \\ 3 & 6 & 1-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

展开此方程得

$$\sigma^3 - 6\sigma^2 - 40\sigma = 0$$

解此方程,可得 3 个主应力为

$$\sigma_{(1)} = 10$$
$$\sigma_{(2)} = 0$$
$$\sigma_{(3)} = -4$$

求对应于 $\sigma_{(1)} = 10$ 的主方向,即要求下述方程组的解

$$\begin{cases} (1-10)n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 3n_3^{(1)} = 0 \\ 2n_1^{(1)} + (4-10)n_2^{(1)} + 6n_3^{(1)} = 0 \\ 3n_1^{(1)} + 6n_2^{(1)} + (1-10)n_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

可解得方向比为

$$n_1^{(1)} : n_2^{(1)} : n_3^{(1)} = 3 : 6 : 5$$

同理,也可解出其它两个主方向的方向比分别为

$$n_1^{(2)} : n_2^{(2)} : n_3^{(2)} = -2 : 1 : 0$$
$$n_1^{(3)} : n_2^{(3)} : n_3^{(3)} = 1 : 2 : -3$$

因此,主轴系的 3 个单位向量可取为

$$e_1^* = n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{70}}(3e_1 + 6e_2 + 5e_3)$$

$$e_2^* = n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2e_1 + e_2)$$

$$e_3^* = n^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{14}}(e_1 + 2e_2 - 3e_3)$$

例 5.2 设点 P 处的主应力为 $\sigma_{(1)} \geqslant \sigma_{(2)} \geqslant \sigma_{(3)}$，证明点 P 处任意面元上的法向应力分量 σ_N 满足不等式

$$\sigma_{(1)} \geqslant \sigma_N \geqslant \sigma_{(3)}$$

证 选取主轴系，则应力张量为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix}$$

在单位法向为 $\boldsymbol{n} = n_i \boldsymbol{e}_i^*$ 的平面上，应力矢量的法向分量为

$$\sigma_N = \boldsymbol{t}^{(n)} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(2)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2$$

由此可见

$$\sigma_N \leqslant \sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(1)}(n_2)^2 + \sigma_{(1)}(n_3)^2 = \sigma_{(1)}$$

$$\sigma_N \geqslant \sigma_{(3)}(n_1)^2 + \sigma_{(3)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2 = \sigma_{(3)}$$

本例说明：主应力中的最大值 $\sigma_{(1)}$ 和最小值 $\sigma_{(3)}$ 是 P 处所有面元上的法向分量的最大值和最小值。

5.1.5 最大剪应力

考虑点 P 处的任一 $\boldsymbol{n}$ 为外法向的面元 $\mathrm{d}S$ 上的应力矢量 $t_i^{(n)}$，总可以把它分解成垂直于 $\mathrm{d}S$ 与相切于 $\mathrm{d}S$ 的两个正交分量，分别称为**法向分量**和**切向分量**(工程上称为**正应力**和**剪应力**)，则法向分量 σ_N 为

$$\sigma_N = \boldsymbol{t}^{(n)} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

切向分量的大小为

$$(\sigma_s)^2 = t_i^{(n)} t_i^{(n)} - (\sigma_N)^2$$

现在选取主轴系，并设主应力按顺序 $\sigma_{(1)} \geqslant \sigma_{(2)} \geqslant \sigma_{(3)}$ 排列，则显然有

$$\sigma_N = \sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(2)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2$$

而剪应力的平方为

$$(\sigma_s)^2 = (\sigma_{(1)} n_1)^2 + (\sigma_{(2)} n_2)^2 + (\sigma_{(3)} n_3)^2 - [\sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(2)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2]^2 \tag{5.1.27}$$

其中 n_i 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，所以有

$$(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1 \tag{5.1.28}$$

这样，求最大剪应力的问题就是求式(5.1.27)在条件式(5.1.28)下的条件极值的问题。

先写出 $(n_3)^2 = 1 - (n_1)^2 - (n_2)^2$，代入式(5.1.27)，然后对 $(\sigma_s)^2$ 求关于 n_1 和 n_2 的偏导数，并令它们等于零，经化简后得

$$n_1(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})(n_1)^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})(n_2)^2 - \frac{\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}}{2}\right] = 0$$

$$n_2(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})\left[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)})(n_1)^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})(n_2)^2 - \frac{\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}}{2}\right] = 0$$

(5.1.29)

现在分三种情形进行讨论。

(一) 当 $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > \sigma_{(3)}$ 时,式(5.1.29) 的解有三组。

(1) $n_1 = n_2 = 0, n_3 = \pm 1$,由此得

$$\sigma_s = 0$$

(2) $n_1 = 0, n_2 \neq 0$,由式(5.1.29) 第二式可解出 $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,从而 $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,把它们代入式(5.1.27),即得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}}{2}$$

(3) $n_2 = 0, n_1 \neq 0$,由式(5.1.29) 第一式可解出 $n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,从而 $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,代入式(5.1.27),即得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}}{2}$$

由于 n_1, n_2, n_3 的可轮换性,因此还存在如下的六种情形。

(4) $n_2 = n_3 = 0, n_1 = \pm 1$,由此得

$$\sigma_s = 0$$

(5) $n_2 = 0, n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 可得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)}}{2}$$

(6) $n_3 = 0, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(2)} - \sigma_{(1)}}{2}$$

(7) $n_3 = n_1 = 0, n_2 = \pm 1$ 可得

$$\sigma_s = 0$$

(8) $n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_3 = 0$ 得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}}{2}$$

(9) $n_1 = 0, n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 得

$$\sigma_s = \pm \frac{\sigma_{(3)} - \sigma_{(2)}}{2}$$

上述九种可能性中只有六种是独立的,最终可以得表 5 - 1。

表 5-1

解	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
n_1	± 1	0	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_2	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
n_3	0	0	± 1	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
σ_s	0	0	0	$\pm\frac{\sigma_{(2)}-\sigma_{(3)}}{2}$	$\pm\frac{\sigma_{(1)}-\sigma_{(3)}}{2}$	$\pm\frac{\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)}}{2}$

前面三组解表明，以主方向为外法线的面元上没有剪应力，即是剪应力的最小值(值得指出，最大和最小剪应力只是指绝对值而言)。剪应力的最大值是

$$(\sigma_{(s)})_{\max} = \frac{\sigma_{(1)} - \sigma_{(3)}}{2} \tag{5.1.30}$$

它在

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1^* \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_3^*$$

的平面上得到。也就是说，最大剪应力所作用的平面，其外法线平分最大主应力方向和最小主应力方向之间的直角。

(二) 当主应力中有两个相等，比如说 $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ 的情形。

此时，表中前四组解都是 $\sigma_s = 0$，最大剪应力还是式(5.1.30) 所示，只要外法线方向与 x_1^* 轴成 45° 的平面上都能达到最大剪应力。

类似地，也可以讨论 $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} > \sigma_{(3)}$ 的情形。

(三) $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ 的情形。

此时由表可见，任何平面上的剪应力都为零。

5.1.6 应力球形张量和应力偏斜张量

有时把应力张量分解成 应力球形张量与应力偏斜张量之和是有益的，前者记作 $\boldsymbol{\Sigma}_P$，后者记作 $\boldsymbol{\Sigma}_D$。**应力球形张量**是这样一个张量

$$\boldsymbol{\Sigma}_P = \sigma_P \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \sigma_P & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_P \end{bmatrix} \tag{5.1.31}$$

其中

$$\sigma_P = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \tag{5.1.32}$$

它表示平均法向应力。而**应力偏斜张量**为

$$
\boldsymbol{\Sigma}_D = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_P & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_P & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_P \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{5.1.33}
$$

这一分解可用下述方式给出

$$
\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_P \delta_{ij} \tag{5.1.34a}
$$

或

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_P + \boldsymbol{\Sigma}_D \tag{5.1.34b}
$$

应力偏斜张量显然与应力张量具有相同的主方向,且应力偏斜张量的3个主值(通常称为主偏应力,记作 $S_{(k)}$),它们与3个主应力有如下关系

$$
S_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_P \tag{5.1.35}
$$

应力偏斜张量的另一个特点是

$$
\mathrm{I}_{\Sigma_D} = S_{ii} = 0
$$

即它的第一主不变量恒等于零。

5.2 应变张量

5.2.1 引　言

在外力的作用下或因温度的变化,物体内部各部分之间要产生相对运动,物体的这种运动形态称为变形。在这里我们只是从几何学观点出发分析研究物体的变形本身,而并不涉及到产生变形的原因和物体的物理性能,所以本节所得的结果对一切连续介质都是适用的。

为了研究物体的运动,首先要引入参考体,并认为它是固定不动的,在参考体上建立参考坐标系;其次,时间从某一固定参考时间(一般取作 $t = 0$)算起。把所考察的连续介质物体看作一个质点系,在某一时刻 t,连续介质物体中的每一个质点,各自在参考空间占据确定的一点,对其整体而言,就说在该瞬时确定了连续介质的**构形**。这时,连续介质物体在空间占据一有限的或无限的区域,它的物质在该区域中是连续分布的。我们常常把初始时刻的构形叫做**初始构形**(或称**未变形构形**),把在任意时刻 t 的构形叫做**即时构形**,把运动终了时刻的构形叫做**最终构形**(或称**已变形构形**)。

本节只讨论连续介质物体的初始构形和最终构形之间的变形情况,而不考虑连续介质是怎样从初始构形逐渐变化为最终构形的,即不考虑变形的历史。

根据上一章对Euler坐标(空间坐标)和Lagrange坐标(物质坐标)的讨论,并都取笛卡尔坐标系进行研究。空间坐标系取为 $ox_1x_2x_3$,沿坐标轴正向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$。设连续介质物体的初始构形占据空间区域 D_0,并在初始构形上固连一笛卡尔坐标系 $o\xi_1\xi_2\xi_3$(即物质坐标系)。为了方便起见,通常总是把物质坐标系取成与空间坐标系重合,即轴向单位矢量也是 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$,连续介质的最终构形在空间占据区域 D,如图5-7所示。

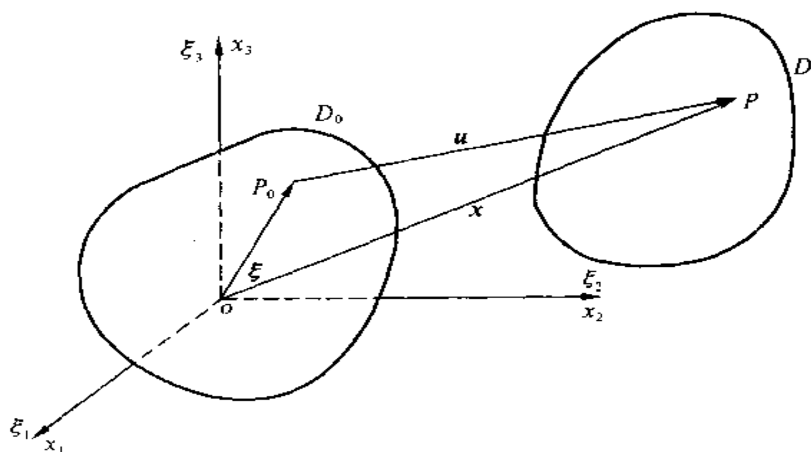


图 5－7　空间坐标与物质坐标

这样，在初始构形中设连续介质的代表质点（即任意取定的一个质点）占据空间中的点 P_0，它的位置矢量我们总是用物质坐标系表示，且记作 $\boldsymbol{\xi}$，我们有

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.2.1}$$

在最终构形中，设原来在 P_0 处的质点现在位于点 P，它的位置矢量总是用空间坐标系表示，记作 $\boldsymbol{x}$，且有

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.2.2}$$

在图 5－7 中，联结点 P_0 与 P（分别为代表质点的初始位置和最终位置）的矢量 $\boldsymbol{u}$ 称为**位置矢量**，则

$$u_i = x_i - \xi_i \tag{5.2.3a}$$

或

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi} \tag{5.2.3b}$$

由物体的连续性假设，要求在变形前的物体，变形后仍保持为连续体。这一物理上的要求反映在数学上，则要求初始构形 D_0 中的每一点，连续变化到最终构形 D 中的相应点，而且两者成一一对应关系。具体说来，坐标变换式

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{5.2.4a}$$

或

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.2.4b}$$

是个单值连续函数，我们还假定式(5.2.4)具有所需的任意阶偏导数，对于一个可能实现的变形，必能反解出 ξ_i 而得

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3) \tag{5.2.5a}$$

或

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.5b}$$

由此可见，连续介质的代表质点有两种坐标：在未变形时它占据初始构形 D_0 中的 P_0 点，坐标为 ξ_i，即物质坐标；在变形后它占据最终构形 D 中的点 P，坐标为 x_i，即空间坐标。于

是有关的几何量或力学量存在两种表示形式，我们把用物质坐标 ξ_i 为自变量的表达式称为**拉格朗日描述法**；把用空间坐标为自变量的表达式称为**欧拉描述法**。

下面我们就来具体展开变形分析。先分别用两种描述法进行有限变形的讨论，在此基础上简化得出小变形下的应变张量。我们将发现，在小变形情况下，可以不必区分两种描述法。

5.2.2　物质变形梯度・拉格朗日有限应变张量

可变形的连续介质物体，在变形时质点间的距离将发生变化，对于刚体来说却没有这种变化。这就使我们很自然地想到，描写变形可以从两质点间的距离着手。因此，我们先考虑物质线元的伸长比。所谓**伸长比**，就是物质线元在变形后的长度与原始长度（即未变形时的长度）之比。

在此我们先采用拉格朗日描述法，即假定式(5.2.4)为已知。考虑初始构形中代表质点 $P_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 及其邻域内的任意邻近点 $Q_0(\xi_1+\mathrm{d}\xi_1,\xi_2+\mathrm{d}\xi_2,\xi_3+\mathrm{d}\xi_3)$，则 $\boldsymbol{P_0Q_0}=\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ 就是未变形时的一个物质线元，初始长度为 $|\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|=\mathrm{d}\xi$，初始方向记作 $\boldsymbol{m}$，即 $\boldsymbol{m}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\xi}$。变形后，$P_0$，$Q_0$ 两点分别对应于 $P(x_1,x_2,x_3)$ 和 $Q(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2+\mathrm{d}x_2,x_3+\mathrm{d}x_3)$ 两点，则变形后的线元为

$$\boldsymbol{PQ}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其长度为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|=\mathrm{d}x$$

变形后的方向记为 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x}$$

如图 5 – 8 所示。

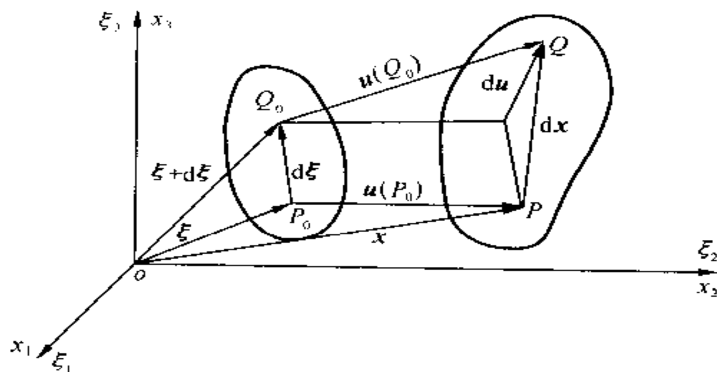


图 5 – 8　变形分析

由式(5.2.4)，我们有

$$\mathrm{d}x_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\xi_j}\mathrm{d}\xi_j \tag{5.2.6}$$

若令

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\xi} = m_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x} = n_i \boldsymbol{e}_i$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_i &= \mathrm{d}\xi m_j \\ \mathrm{d}x_i &= \mathrm{d}x n_i \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

代入式(5.2.6),并用 $\mathrm{d}\xi$ 除两端,即得

$$n_i\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}\right) = m_j\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)_{P_0}$$

圆括号外的 P_0 表示在点 P_0 处赋值,而$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi}$就是物质线元$P_0Q_0$的伸长比,记作 $\lambda_{(\boldsymbol{m})}$,最终我们得到

$$n_i\lambda_{(\boldsymbol{m})} = m_j\left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right)_{P_0} \tag{5.2.8}$$

若取上式 3 个方程的平方和,由于 $n_i n_i = 1$,故有

$$\lambda^2_{(\boldsymbol{m})} = m_i m_j \frac{\partial x_r}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_j} \tag{5.2.9}$$

上式中的偏导数仍在 P_0 处赋值,以后不再重复。这样,初始构形中以 P_0 为起点,方向为 m_i 的物质线元的伸长比可用式(5.2.9) 算出,然后代入式(5.2.8),求出变形后的方向 n_i。

在式(5.2.8) 中有 9 个量,记作 F_{ij},即

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \tag{5.2.10a}$$

不难看出,它就是式(5.2.4) 中的 $\boldsymbol{x}$ 关于坐标 ξ_i 的右梯度,其不变性记法是

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{x}\ \nabla_{\xi} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = F_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.2.10b}$$

我们把它称为**物质变形梯度**,式中线性微分算子"∇_{ξ}"表示关于坐标 ξ_i 的梯度。物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 在基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 下的对应矩阵记作 $\boldsymbol{F}$,则有

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\ \frac{\partial}{\partial \xi_2}\ \frac{\partial}{\partial \xi_3}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \tag{5.2.10c}$$

引进了物质变形梯度后,就可写出式(5.2.6)、式(5.2.8) 和式(5.2.9) 的不变性记法

$$\mathrm{d}x_i = F_{ij}\mathrm{d}\xi_i \quad \text{或} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.11}$$

$$n_i = \lambda^{-1}_{(m)}F_{ij}m_j \quad \text{或} \quad \boldsymbol{n} = \lambda^{-1}_{(m)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{m} \tag{5.2.12}$$

$$\lambda^2_{(\boldsymbol{m})} = m_i m_j F_{ri}F_{rj} \quad \text{或} \quad \lambda^2_{(\boldsymbol{m})} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{F}_c\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{m} \tag{5.2.13}$$

上式中的 $\boldsymbol{F}_c$ 就是 $\boldsymbol{F}$ 的共轭二阶张量(即转置张量),即 $\nabla_{\xi}\boldsymbol{x}$。大家不难写出它的矩阵表达式。

由式(5.2.13) 可看出还可以定义新张量 g_{ij}

$$g_{ij} = F_{ri}F_{rj} = \frac{\partial x_r}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_j} \tag{5.2.14a}$$

或

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F} \tag{5.2.14b}$$

因为 $\boldsymbol{G}$ 是两个二阶张量的点积，所以它也是一个二阶张量。取 $\boldsymbol{G}$ 的共轭张量，则有

$$\boldsymbol{G}_c = (\boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F})_c = \boldsymbol{F}_c \cdot (\boldsymbol{F}_c)_c = \boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \tag{5.2.15}$$

由此可见 $\boldsymbol{G}$ 是个对称的二阶张量。通常把 $\boldsymbol{G}$ 称为**格林变形张量**。

引进了 $\boldsymbol{G}$ 以后，在初始构形中具有方向 $\boldsymbol{m}$ 的物质线元的伸长比可表示为

$$\lambda_{(\boldsymbol{m})}^2 = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{m} \tag{5.2.16}$$

特别地，对于刚体运动来说，我们知道可以用平移结合一个正交变换来描述，即此时的物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 所对应的矩阵是正交矩阵，所以有

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$$

因此在刚体运动过程中恒有 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$，从而使得物质线元的伸长比

$$\lambda_{(\boldsymbol{m})}^2 = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{m} = 1$$

恒成立。反之，恒满足 $\lambda_{(\boldsymbol{m})}^2 = 1$ 的物体就是刚体。由此可见，$\boldsymbol{G}$ 在本质上是同物体的变形相关连的，它是一个适当的变形的度量。下面就来讨论怎样用格林变形张量 $\boldsymbol{G}$ 来度量变形。

按照常规的做法，我们再引进一个二阶张量

$$L_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij}) \tag{5.2.17a}$$

或

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{I}) \tag{5.2.17b}$$

通常把它叫做**拉格朗日（或格林）有限应变张量**。利用 $\boldsymbol{L}$ 可以表示未变形构形中的线元长度平方与变形后的长度平方的改变量，我们有

$$(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 = (g_{ij} - \delta_{ij})\mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\xi_j = 2L_{ij}\mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\xi_j \tag{5.2.18a}$$

或

$$(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \cdot 2\boldsymbol{L} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.18b}$$

两端再除以$(\mathrm{d}\xi)^2$ 后，变成

$$\lambda_{(\boldsymbol{m})}^2 - 1 = 2L_{ij}m_i m_j = \boldsymbol{m} \cdot 2\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{m} \tag{5.2.19}$$

显然，拉格朗日有限应变张量也能描述一点处的形变状态，并且当做刚体运动时，$\boldsymbol{L}$ 恒等于零张量。

利用 L_{ij} 可以表示线元的相对伸长和两线元之间角度的变化。下面我们来导出沿着 3 个坐标轴正向的物质线元的相对伸长和它们之间原来的直角角度改变量与 L_{ij} 的关系式，从而也可得到它们与 g_{ij} 的关系。

所谓**相对伸长**，或者称为**伸长度**，即为

$$\frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\xi} = \lambda_{(\boldsymbol{m})} - 1$$

由公式(5.2.19) 知，沿着 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的伸长比 $\lambda_{(\boldsymbol{e}_1)}$ 满足关系式

$$\lambda_{(\boldsymbol{e}_1)}^2 - 1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot 2\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{e}_1 = 2L_{11}$$

由此可得未变形时沿着 ξ_1 轴的线元伸长度(同理可得沿着 ξ_2 轴,ξ_3 轴的伸长度)为

$$
\begin{aligned}
\lambda_{(e_1)} - 1 &= \sqrt{1 + 2L_{11}} - 1 = \sqrt{g_{11}} - 1 \\
\lambda_{(e_2)} - 1 &= \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1 = \sqrt{g_{22}} - 1 \\
\lambda_{(e_3)} - 1 &= \sqrt{1 + 2L_{33}} - 1 = \sqrt{g_{33}} - 1
\end{aligned}
\tag{5.2.20}
$$

再来考察点 P_0 处坐标轴正向间的直角在变形后的直度改变量。设沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的线元 $\mathrm{d}\xi_1 \boldsymbol{e}_1$ 在变形后为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}$,则由式(5.2.11)知 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\xi_1 \boldsymbol{e}_1 = F_{i1}\boldsymbol{e}_i$;同样地,沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的线元 $\mathrm{d}\xi_2 \boldsymbol{e}_2$ 在变形后为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\xi_2 \boldsymbol{e}_2 = F_{i2}\boldsymbol{e}_i$。再设 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}$ 之间的夹角为 θ,则有直角改变量

$$
\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta
$$

且

$$
\sin\gamma_{12} = \cos\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}|\,|\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}|}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}| &= \lambda_{(e_1)}\mathrm{d}\xi_1 \\
|\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}| &= \lambda_{(e_2)}\mathrm{d}\xi_2
\end{aligned}
$$

而

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} = g_{12}\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2
$$

所以可得

$$
\sin\gamma_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}
$$

同理,设 $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 方向的直角改变量为 γ_{23},$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的直角改变量为 γ_{31},我们可得

$$
\begin{aligned}
\sin\gamma_{12} &= \frac{2L_{12}}{\sqrt{1 + 2L_{11}}\sqrt{1 + 2L_{22}}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \\
\sin\gamma_{23} &= \frac{2L_{23}}{\sqrt{1 + 2L_{22}}\sqrt{1 + 2L_{33}}} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \\
\sin\gamma_{31} &= \frac{2L_{31}}{\sqrt{1 + 2L_{33}}\sqrt{1 + 2L_{11}}} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}}
\end{aligned}
\tag{5.2.21}
$$

由以上分析可知,当采用拉格朗日描述法时,只要知道 $\boldsymbol{x}$ 对 $\boldsymbol{\xi}$ 的依赖关系式(5.2.4),就不难计算出 $\boldsymbol{F}$,从而求出 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{L}$。这些张量的分量都是物质坐标的函数,并且自然地可用 $\boldsymbol{G}$ 或 $\boldsymbol{L}$ 作为变形的度量。

由式(5.2.20) 和式(5.2.21) 不难看出,用 g_{ij} 表示比 L_{ij} 表示简单得多,那么为什么要引进 $\boldsymbol{L}$ 呢?事实上,在具体求解力学问题时,式(5.2.4) 正是待求的,并且待求的矢量常常是式(5.2.3) 中的位移矢量 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}$,而不直接求 $\boldsymbol{x}$。因此物质变形梯度常常用物质位移梯度替代,而当用物质位移梯度来表达 $\boldsymbol{L}$ 时就很容易推出小变形时的应变张量。

所谓**物质位移梯度**,就是位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 关于物质坐标 ξ_i 的右梯度,记作 $\boldsymbol{J}$,它也是一个二阶张量,由式(5.2.3) 知

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} - \delta_{ij}$$

记

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$$

则有

$$J_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} \tag{5.2.22a}$$

或

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{u}\ \nabla_\xi \tag{5.2.22b}$$

物质位移梯度在坐标系 ξ_i 下的对应矩阵记作 $\boldsymbol{J}$，则有

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\ \frac{\partial}{\partial \xi_2}\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \tag{5.22.23}$$

把式(5.2.22) 代入式(5.2.17) 并经过适当的运算不难得到

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_r}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_r}{\partial \xi_j} \right) \tag{5.2.24a}$$

或

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_c + \boldsymbol{J}_c \cdot \boldsymbol{J}) \tag{5.2.24b}$$

当小变形时，即若$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \ll 1$ 时，在忽略了二阶小量后，即得到拉格朗日线性应变张量，此时

$$L_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) \tag{5.2.25a}$$

或

$$\boldsymbol{L} \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\ \nabla_\xi + \nabla_\xi\, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_c) \tag{5.2.25b}$$

5.2.3 空间变形梯度·欧拉有限应变张量

现在采用欧拉描述法，即假定式(5.2.5) 是已知的。值得指出，在拉格朗日描述法中，是以初始构形中的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{Q}_0$ 出发来描述变形的；在欧拉描述法中，由于 x_i 是自变量，所以采用从最终构形的物质线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{PQ}$ 出发来描述变形的。对于有限变形(即所谓的大变形问题) 它们是有明显区别的。

如图 5 - 8 所示，考察最终构形中的代表质点 P，线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{PQ}$ 的长度为 $\mathrm{d}x = |\mathrm{d}\boldsymbol{x}|$，方向为 $\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}x} = n_i\boldsymbol{e}_i$。由式(5.2.5) 可算出 P, Q 两点对应于初始构形中 P_0, Q_0 两点，仍然设未变形时的线元长度为 $\mathrm{d}\xi = |\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}|$，方向为 $\boldsymbol{m} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}\xi} = m_i\boldsymbol{e}_i$。

由式(5.2.5)，我们有

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} dx_j \tag{5.2.26}$$

由于 $\boldsymbol{m} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\xi} = m_i \boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dx} = n_i \boldsymbol{e}_i$，因此

$$\begin{aligned} d\xi_i &= d\xi m_i \\ dx_j &= dx n_j \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

代入式(5.2.26)，并用 dx 除两端，即得

$$m_i \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}} = n_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)_P$$

圆括号外面的 P 表示在点 P 处赋值，把伸长比 $\frac{dx}{d\xi}$ 记做 $\Lambda_{(n)}$，则最终得到

$$m_i \Lambda_{(n)}^{-1} = n_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)_P \tag{5.2.28}$$

取它们的平方和后得

$$\Lambda_{(n)}^{-2} = n_i n_j \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \tag{5.2.29}$$

上式中偏导数仍在点 P 处赋值，以后不再重复。这样，最终构形中以 P 为起点，方向为 n_i 的物质线元的伸长比可用式(5.2.29)给出，然后代入式(5.2.28)，求出变形前的方向 m_i。

在式(5.2.28)中也有9个量，记做 H_{ij}，即

$$H_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tag{5.2.30a}$$

它就是式(5.2.5)中的 $\boldsymbol{\xi}$ 关于坐标 x_i 的右梯度，其不变性记法是

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\xi} \nabla_x = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = H_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{5.2.30b}$$

我们把它称为空间变形梯度，式中线性微分算子"∇_x"表示关于空间坐标 x_i 的梯度。$\boldsymbol{H}$ 在基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 下的对应矩阵是

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{5.2.30c}$$

利用 $\boldsymbol{H}$ 可写出式(5.2.26)，式(5.2.28)和式(5.2.29)的不变性记法为

$$d\xi_i = H_{ij} d\xi_j \quad 或 \quad d\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.31}$$

$$m_i = \Lambda_{(n)} H_{ij} n_j \quad 或 \quad \boldsymbol{m} = \Lambda_{(n)} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5.2.32}$$

$$\Lambda_{(n)}^{-2} = n_i n_j \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \quad 或 \quad \Lambda_{(n)}^{(-2)} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}_c \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5.2.33}$$

上式中的 $\boldsymbol{H}_c = \nabla_x \boldsymbol{\xi}$ 就是 $\boldsymbol{H}$ 的共轭二阶张量。

定义柯西变形张量 $\boldsymbol{C} = C_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ 为

$$C_{ij} = H_{ri}H_{rj} = \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} \tag{5.2.34a}$$

或

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}_c \cdot \boldsymbol{H} \tag{5.2.34b}$$

同样可以证明它也是个二阶对称张量，即存在

$$\boldsymbol{C}_c = \boldsymbol{C} \tag{5.2.35}$$

引进了 $\boldsymbol{C}$ 以后，式(5.2.33) 可以写成

$$\Lambda_{(n)}^{(-2)} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n} \tag{5.2.36}$$

同样地，对于刚体运动，恒有

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$$

再定义**欧拉有限应变张量** $\boldsymbol{E}_A = E_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 为

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - C_{ij}) \tag{5.2.37a}$$

或

$$\boldsymbol{E}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}) \tag{5.2.37b}$$

这时有

$$(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 = (\delta_{ij} - C_{ij})\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = 2E_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \tag{5.2.38a}$$

或

$$(\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot 2\boldsymbol{E}_A \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5.2.38b}$$

两边再除以$(\mathrm{d}x)^2$ 后变成

$$1 - \Lambda_{(n)}^{-2} = \boldsymbol{n} \cdot 2\boldsymbol{E}_A \cdot \boldsymbol{n} \tag{5.2.39}$$

当做刚体运动时，将有 $\boldsymbol{E}_A$ 恒等于零张量。

显然利用 C_{ij} 和E_{ij} 也能描述一点处的变形。在最终构形中沿着坐标轴正向的3个相对伸长显然为

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(e_1)} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2E_{11}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{C_{11}}} - 1 \\
\Lambda_{(e_2)} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2E_{22}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{C_{22}}} - 1 \\
\Lambda_{(e_3)} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2E_{33}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{C_{33}}} - 1
\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

在欧拉描述法中直角的改变量是这样计算的。考察最终构形 P 点处沿坐标轴正向的直角，例如 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的线元 $\mathrm{d}x_1\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的线元 $\mathrm{d}x_2\boldsymbol{e}_2$ 之间的直角，设这两个线元在初始构形中为线元

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^{(1)} &= \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}x_1\boldsymbol{e}_1 = H_{i1}\boldsymbol{e}_i \\
\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}^{(2)} &= \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}x_2\boldsymbol{e}_2 = H_{i2}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

它们的夹角为 θ，令 $\gamma_{12} = \theta - \frac{\pi}{2}$，则

$$\sin\gamma = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$

因此

$$\sin\gamma_{12} = -\cos\theta = -\frac{d\boldsymbol{\xi}^{(1)} \cdot d\boldsymbol{\xi}^{(2)}}{|d\boldsymbol{\xi}^{(1)}||d\boldsymbol{\xi}^{(2)}|}$$

又因为

$$|d\boldsymbol{\xi}^{(1)}| = \Lambda_{(\boldsymbol{e}_1)}^{-1} dx_1$$
$$|d\boldsymbol{\xi}^{(2)}| = \Lambda_{(\boldsymbol{e}_2)}^{-1} dx_2$$

而

$$d\boldsymbol{\xi}^{(1)} \cdot d\boldsymbol{\xi}^{(2)} = C_{12} dx_1 dx_2$$

所以可以得到

$$\sin\gamma_{12} = -\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}}$$

同理,设 $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 方向的直角改变量为 γ_{23},$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的直角改变量为 γ_{31},我们可得

$$\begin{aligned}
\sin\gamma_{12} &= \frac{2E_{12}}{\sqrt{1-2E_{11}}\sqrt{1-2E_{22}}} = \frac{-C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}} \\
\sin\gamma_{23} &= \frac{2E_{23}}{\sqrt{1-2E_{22}}\sqrt{1-2E_{33}}} = \frac{-C_{23}}{\sqrt{C_{22}}\sqrt{C_{33}}} \\
\sin\gamma_{31} &= \frac{2E_{31}}{\sqrt{1-2E_{33}}\sqrt{1-2E_{11}}} = \frac{-C_{31}}{\sqrt{C_{33}}\sqrt{C_{11}}}
\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

当采用欧拉描述法时,就应计算 $\boldsymbol{H}$,然后再算出 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}_A$,它们都是空间坐标 x_i 的函数,$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}_A$ 可作为变形的度量。

再引进位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 关于空间坐标 x_i 的右梯度,称为空间位移梯度,记做

$$\boldsymbol{K} = K_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

由于

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - H_{ij}$$

故有

$$K_{ij} = \delta_{ij} - H_{ij} \tag{5.2.42a}$$

或

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H} = \boldsymbol{u}\nabla_x \tag{5.2.42b}$$

它的对应矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{5.2.43}$$

把式(5.2.42)代入式(5.2.37),并经适当的运算后不难得到

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right) \tag{5.2.44a}$$

或

$$\boldsymbol{E}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}_c - \boldsymbol{K}_c \cdot \boldsymbol{K}) \tag{5.2.44b}$$

当小变形时，即若$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$时，忽略二阶小量后即得欧拉线性应变张量，此时

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5.2.45a}$$

或

$$\boldsymbol{E}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\ \nabla_x + \nabla_x \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}_c) \tag{5.2.45b}$$

5.2.4 变形梯度的极分解

考虑物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$，由于它的对应矩阵的行列式正是坐标变换的雅可比式，根据连续性假设，其雅可比式不可能为零。由此可知物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 是非奇异二阶张量。把极分解定理应用于 $\boldsymbol{F}$，我们有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \quad 或 \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{5.2.46}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F}} = \sqrt{\boldsymbol{G}} \quad 和 \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}_c \tag{5.2.47}$$

而 $\boldsymbol{Q}$ 是正交二阶张量。通常把 $\boldsymbol{Q}$ 称为**旋转张量**，把正定对称二阶张量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别称为**右伸长张量与左伸长张量**。

当把式(5.2.46)代入式(5.2.26)时，我们有

$$\mathrm{d}x_i = Q_{ik}U_{kj}\mathrm{d}\xi_j = V_{ik}Q_{kj}\mathrm{d}\xi_j \tag{5.2.48a}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.48b}$$

从式(5.2.48)可以充分看出连续介质从初始构形变为最终构形的变化机理。位于点 P_0 处的物质微元除了随着 P_0 点一起平移到 P 点外，都还存在着刚性转动和变形。当用右伸长张量描写 $\boldsymbol{F}$ 时，先变形后作刚性转动；用左伸长张量描写 $\boldsymbol{F}$ 时，先作刚性旋转后作变形。从式(5.2.47)可以看出，$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 反映出相同的变形状态，只因后面一种情形是先作刚性转动再作变形，因此变形的方位与 $\boldsymbol{U}$ 正好相差一个由 $\boldsymbol{Q}$ 反映的刚性旋转。由于 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_c \cdot \boldsymbol{F}$，因此 $\boldsymbol{G}$ 只能反映变形，只有把 $\boldsymbol{F}$ 作极分解时才能把伴随变形一起发生的刚性旋转 $\boldsymbol{Q}$ 分离出来。不论是大变形还是小变形情形，$\boldsymbol{F}$ 的极分解都是有意义的。

当然，对于空间变形梯度也可作极分解，并可作出类似的解释。但因

$$H_{ik}F_{kj} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}$$

所以

$$H = F^{-1} \tag{5.2.49a}$$

或

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}^{-1} \tag{5.2.49b}$$

这意味着空间变形梯度恰是物质变形梯度所反映的变化情况的逆向演变。由此也可帮助我们理解 $\boldsymbol{H}$ 作极分解后的物理解释。这里不予细述。

5.2.5 线性应变张量和线性旋转张量

前面已经指出，当小变形时，即$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \ll 1$或$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$时，在忽略了二阶小量后，分别得到拉格朗日线性应变张量和欧拉线性应变张量。在前面我们都没有给出相应的记号，其原因是两者之间也只相差二阶小量，因此可以采用统一的表达形式，并统称为线性应变张量。

事实上，因为 $u_i = x_i - \xi_i$，所以利用式(5.2.49)，有

$$\boldsymbol{K} = [K_{ij}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \left[\delta_{ij} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right] = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-1}$$

根据矩阵的二项展开式可得

$$\boldsymbol{F}^{-1} = [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})]^{-1} = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}]^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{J}^3 + \cdots$$

因此在忽略了二阶小量后有

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{J}^3 - \cdots = \boldsymbol{J}$$

这就意味着物质位移梯度与空间位移梯度在小变形的情况下只相差二阶小量。因此不论采用拉格朗日描述法还是欧拉描述法，两者的线性应变张量是相同的，统一用一个二阶张量 $\boldsymbol{E} = \varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 表示。今后在小变形时不必区分两种描述法，并按照传统的方法在小变形时总是采用拉格朗日描述法，且把 $\boldsymbol{E}$ 称为**线性应变张量**，简称**应变张量**。由于小变形时只用 ξ_i 为自变量，所以可把应变张量写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{5.2.50a}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u}) \tag{5.2.50b}$$

显然 $\boldsymbol{E}$ 也是个对称二阶张量，它的 9 个分量是

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3}, \qquad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}\right)
\end{aligned} \tag{5.2.50c}$$

在线弹性理论中把式(5.2.50b) 称为**几何方程**。与有限变形中的式(5.2.20) 或式(5.2.40) 相对照，$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ 分别表示沿着三个坐标轴正向 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线元的相对伸长，在工程中称为**正应变**；与有限变形的式(4.2.21) 或式(5.2.41) 相对照，由于小变形时

$$\gamma_{12} \approx \sin\gamma_{12} \approx 2L_{12} \approx \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\right) = 2\varepsilon_{12}$$

同样有

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$$

$$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$$

在工程中，把 $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ 称为**剪应变**，因此 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ 分别是相应工程剪应变的一半，并称为**张量剪应变**。

由变形梯度的极分解知，$\boldsymbol{E}$ 与有限变形中的 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{E}_A$ 一样只反映变形部分，其刚性旋转部分必须对变形梯度作极分解时才能分离出来。在小变形时通常不作极分解，而采用和分解即可把刚性旋转部分分离出来。所谓和分解就是把变形梯度分解成对称部分与反对称部分之和。由于 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I}$，显然 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 的反对称部分相同，所以常常对 $\boldsymbol{J}$ 进行和分解来分离出刚性旋转部分。$\boldsymbol{J}$ 的和分解公式为

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}_c) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W} \tag{5.2.51}$$

显然其对称部分就是应变张量 $\boldsymbol{E}$，其反对称部分是一个新的二阶张量，记做 $\boldsymbol{W} = W_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$，所以有

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{5.2.52a}$$

或

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u}) \tag{5.2.52b}$$

把 $\boldsymbol{W}$ 称作**线性旋转张量**，它代表微体元的刚性旋转部分是容易理解的。因为当在点 P_0 处 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ 时就意味着 P_0 处的微体元没有变形，剩下的 $\boldsymbol{W}$ 必然是刚性旋转部分的反映。

根据二阶反对称张量的性质知，$\boldsymbol{W}$ 有一个反偶矢量，记做 $\boldsymbol{\omega} = \omega_i\boldsymbol{e}_i$，则有

$$\omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}W_{kj} \tag{5.2.53a}$$

或

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{5.2.53b}$$

常常把 $\boldsymbol{\omega}$ 叫做**线性旋转矢量**。于是位移微分可表示为

$$\mathrm{d}u_i = J_{ij}\mathrm{d}\xi_j = E_{ij}\mathrm{d}\xi_j + W_{ij}\mathrm{d}\xi_j = E_{ij}\mathrm{d}\xi_j + \epsilon_{ijk}\omega_k\mathrm{d}\xi_j \tag{5.2.54a}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.54b}$$

上式中的第一部分是由变形产生的，第二部分就是由刚性旋转产生的。若取

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \,/\!/\, \boldsymbol{\omega}$$

则第二部分为零，这说明 $\boldsymbol{\omega}$ 所在的轴就是刚性旋转的转动轴。由于矢量和是可交换的，因此先变形还是先作微小转动是无关紧要的。

值得指出，只有在小变形时，才能作和分解，在有限变形时是不能作和分解的，必须对 $\boldsymbol{F}$ 进行极分解来解释变形的机理。在有限变形时，由于一般说来 $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{V}$，这意味着变形和旋转是不可交换的。当然，小变形时也可将 $\boldsymbol{F}$ 进行极分解，可以设想在相差一个二阶小量的情况下必可得到 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$。还可指出在小变形情形下，按 $\boldsymbol{F}$ 的极分解得到的旋转张量 $\boldsymbol{Q}$ 和按和分解得到的线性旋转张量 $\boldsymbol{W}$ 之间只相差一个二阶无穷小量，因此也是相同的。

5.2.6 线性应变张量的几何解释

首先推出点 P_0 处任一线元的伸长比、相对伸长和最终方向。假设 $\boldsymbol{P_0Q_0} = \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$，长度为 $\mathrm{d}\xi$，方向为 $\boldsymbol{m}$；它在最终构形中是线元 $\boldsymbol{PQ} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}$，长度为 $\mathrm{d}x$，方向为 $\boldsymbol{n}$，则由式(5.2.18)，把 L_{ij} 用 ϵ_{ij} 替代后得

$$(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}\xi)^2=2\varepsilon_{ij}\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j$$

两边除以$(\mathrm{d}\xi)^2$，等式右端即可化为$2\varepsilon_{ij}m_im_j$，而等式的左端在忽略了二阶小量后可得

$$\frac{(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}\xi)^2}{(\mathrm{d}\xi)^2}=\frac{(\mathrm{d}x+\mathrm{d}\xi)}{\mathrm{d}\xi}\frac{(\mathrm{d}x-\mathrm{d}\xi)}{\mathrm{d}\xi}=2(\lambda_{(m)}-1)$$

所以最终得

$$\lambda_{(m)}-1=\varepsilon_{ij}m_im_j \tag{5.2.55a}$$

或

$$\lambda_{(m)}-1=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{m} \tag{5.2.55b}$$

上式就是任一线元的相对伸长计算公式。其最终方向可以这样得到，由于$x_i=u_i+\xi_i$，所以

$$\mathrm{d}x_i=\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}\mathrm{d}\xi_j+\delta_{ij}\mathrm{d}\xi_j=(J_{ij}+\delta_{ij})\mathrm{d}\xi_j \tag{5.2.56a}$$

或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u}\,\nabla+\boldsymbol{I})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{I})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.2.56b}$$

两边除以$\mathrm{d}\xi$后即得

$$\lambda_{(m)}n_i=(u_{i,j}+\delta_{ij})m_j \tag{5.2.57a}$$

或

$$\lambda_{(m)}\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{u}\,\nabla+\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{m} \tag{5.2.57b}$$

由式(5.2.55)知，当$\boldsymbol{m}$分别取$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$时，再次得到沿坐标轴正向线元的相对伸长就是ε_{11}，ε_{22}和ε_{33}。现在对正应变作出几何解释，以ε_{22}为例，它表示初始平行于ξ_2轴的物质线元的相对伸长。设初始线元为$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{Q}_0=\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_2$，在最终构形中对应于线元$\boldsymbol{PQ}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}$，则由式(5.2.56)可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}=(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{I})\cdot\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial u_1}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_1+\left(1+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_2}\right)\mathrm{d}\xi_3\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial u_3}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\xi_2\boldsymbol{e}_3$$

由此不难看出

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}\cdot\boldsymbol{e}_2-\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_2}=\frac{\partial u_2}{\partial\xi_2}=\varepsilon_{22}=\lambda_{e_2}-1 \tag{5.2.58}$$

式(5.2.58)表明，在小变形理论中计算物质线元的伸长度$\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\xi}$时，其变形后的长度$\mathrm{d}x$可以用变形后的线元在变形前的线元单位方向上的投影来代替。

再来考察剪应变的几何解释，我们以$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$方向的直角改变量为例来说明之。再设初始线元$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{R}_0=\mathrm{d}\xi_3\boldsymbol{e}_3$，它在最终构形中是$\boldsymbol{PR}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)}$，则由式(5.2.57)知有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}}{\mathrm{d}\xi_2}=\frac{\partial u_1}{\partial\xi_2}\boldsymbol{e}_1+\left(1+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_2}\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial u_3}{\partial\xi_2}\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)}}{\mathrm{d}\xi_3}=\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\boldsymbol{e}_2+\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial\xi_3}\right)\boldsymbol{e}_3$$

在小变形时，在一阶近似下，上面两式左端可用单位矢量表示为

$$\boldsymbol{n}^{(2)}=\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial u_3}{\partial\xi_2}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n}^{(3)}=\frac{\partial u_1}{\partial\xi_3}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial u_2}{\partial\xi_3}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$$

因此,最终构形中的夹角余弦为

$$\cos\theta = \boldsymbol{n}^{(2)} \cdot \boldsymbol{n}^{(3)} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}$$

再忽略二阶小量,并注意到

$$\gamma_{23} \approx \sin\gamma_{23} = \cos\theta$$

因此得

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} = 2\varepsilon_{23} \tag{5.2.59a}$$

同理有

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} = 2\varepsilon_{31} \tag{5.2.59b}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = 2\varepsilon_{12} \tag{5.2.59c}$$

式(5.2.59)再次说明小变形时张量剪应变与工程剪应变之间的关系。由推导过程可以看出,忽略乘积项$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_3}$,意味着可以用 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)}$ 在 $\xi_2\xi_3$ 平面上的投影的角度改变量来代替精确的角度改变量。在图 5-9 中,$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)}$ 在 $\xi_2\xi_3$ 平面上的投影就是 PQ' 与 PR',显然 PQ'' 就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} \cdot \boldsymbol{e}_2$,$PR''$ 就是 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)} \cdot \boldsymbol{e}_3$,所以

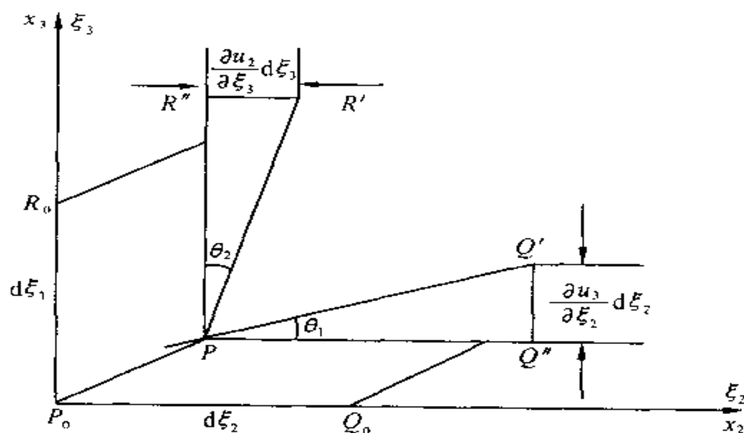


图 5-9　剪应变

$$Q''Q' = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}\mathrm{d}\xi_2$$

$$R''R' = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}\mathrm{d}\xi_3$$

且有

$$\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2}$$

$$\theta_2 \approx \tan\theta_2 \approx \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3}$$

也即在忽略了二阶小量后

$$\gamma_{23} = \theta_1 + \theta_2 = 2\varepsilon_{23} \tag{5.2.60}$$

值得指出，在研究小变形的"弹性力学"或"弹性理论"的一般教科书中，常常直接从这里所讲的几何解释为基础直接引入应变分量的。但是 $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ 不满足张量变换规则，必须采用 $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ 与 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ 构成的对称张量才满足张量变换规则。

虽然线性应变张量不是应变的精确度量，但常常是精确量的最佳近似。对于结构材料，ε_{ij} 典型数量级是 0.001 或更小，确实远小于 1。经典的弹性理论及其许多成功的应用就是建立在这一近似基础上的。

5.2.7 线性应变张量的性质

由于线性应变张量 $\boldsymbol{E}$ 是对称二阶张量，所以具有对称二阶张量的一切性质，必存在 3 个实特征值和 3 个相互垂直的特征方向，在以特征方向为坐标轴时就可把 $\boldsymbol{E}$ 化为对角阵。

应变张量 ε_{ij} 的主方向满足关系

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \lambda \boldsymbol{n}$$

或者写成

$$(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = 0 \tag{5.2.61a}$$

或

$$(\boldsymbol{E} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{5.2.61b}$$

欲得 $\boldsymbol{n}$ 的非零解，当且仅当上式的系数行列式等于零，即

$$|\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$$

展开后得到特征方程，即三次式

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_E\lambda^2 + \mathrm{II}_E\lambda - \mathrm{III}_E = 0 \tag{5.2.62}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_E &= \varepsilon_{ii} = \mathrm{tr}\boldsymbol{E} \\ \mathrm{II}_E &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}) \\ \mathrm{III}_E &= |\varepsilon_{ij}| = \det\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{5.2.63}$$

分别称为**线性应变张量的第一、第二、第三主不变量**。由式(5.2.62)可求出 3 个实根，记做 $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}$ 和 $\varepsilon_{(3)}$，叫做**线性应变张量的主应变**；它们对应的方向 $\boldsymbol{n}$ 叫做**应变主方向**。当取主轴系时，应变张量 $\boldsymbol{E}$ 化为对角形，也就是说此时的剪应变全为零。

5.2.8 体积应变、应变球形张量和应变偏斜张量

当用主应变表示应变张量的第一主不变量时有

$$\mathrm{I}_E = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \tag{5.2.64}$$

它有一个重要的物理解释。为了证明这一点，考察一长方形微体元，使得它的棱平行于主方向。设每边的长度为 $\mathrm{d}\xi_1, \mathrm{d}\xi_2, \mathrm{d}\xi_3$，则其初始体积为

$$V = \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

变形后，由于取的是主轴系，所以仍然是个长方体，相应的边长分别为

$$(1+\varepsilon_{(1)})\mathrm{d}\xi_1$$
$$(1+\varepsilon_{(2)})\mathrm{d}\xi_2$$
$$(1+\varepsilon_{(3)})\mathrm{d}\xi_3$$

所以其体积变为

$$V+\mathrm{d}V=(1+\varepsilon_{(1)})(1+\varepsilon_{(2)})(1+\varepsilon_{(3)})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$$

如果用 θ 表示单位体积的变化，即**体积应变**，则在忽略了二阶小量后有

$$\theta=\frac{\mathrm{d}V}{V}=\varepsilon_{(1)}+\varepsilon_{(2)}+\varepsilon_{(3)}=\mathrm{I}_E \tag{5.2.65}$$

上节我们把应力张量分解成应力球形张量与应力偏斜张量，采用类似的方法也可以把线性应变张量 $\boldsymbol{E}$ 分解成**应变球形张量** $\boldsymbol{E}_M$ 与**应变偏斜张量** $\boldsymbol{E}_D$ 之和。即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_M+\boldsymbol{E}_D \tag{5.2.66}$$

应变球形张量 $\boldsymbol{E}_M$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}_M=\varepsilon_M\boldsymbol{I} \tag{5.2.67a}$$

它的对应矩阵为

$$\boldsymbol{E}_M=\begin{bmatrix}\varepsilon_M & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_M & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_M\end{bmatrix} \tag{5.2.67b}$$

其中

$$\varepsilon_M=\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}=\frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})=\frac{1}{3}\mathrm{I}_E \tag{5.2.68}$$

应变偏斜张量 $\boldsymbol{E}_D$，它的分量用 e_{ij} 表示，则有

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij}+\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{5.2.69a}$$

或

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_D+\frac{1}{3}\mathrm{I}_E\boldsymbol{I} \tag{5.2.69b}$$

显然，体积应变与应变偏斜张量无关。

应变偏斜张量也是对称二阶张量，因此也可求出它的主值和主方向。显然应变偏斜张量的主方向与线性应变张量 $\boldsymbol{E}$ 的主方向相同。它的主值，称为**主偏斜应变**，记做 $e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}$，容易证明它们与主应变有如下关系

$$e_{(i)}=\varepsilon_{(i)}-\frac{1}{3}\mathrm{I}_E \tag{5.2.70}$$

5.2.9 应变的相容方程

以上我们讨论了一点的应变状态。现在进一步讨论连续体内应变场所必须满足的微分关系。

在小变形的情况下，由式(5.2.50a)知

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$

如果知道位移分量 u_i，便可由上式求得应变分量 ε_{ij}。现在提出一个相反的问题：如果给定应变分量 ε_{ij}，能否确定位移分量 u_i 呢？

因 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$，所以式(5.2.50a)表示6个方程，而未知量只有3个(即 u_1,u_2,u_3)，在一般情况下，这组方程没有单值连续解。若要使方程组式(5.2.50a)具有单值连续解，应变场 ε_{ij} 必须满足一定的条件，通常称为变形的**相容方程**或称**相容条件**。

很明显，如果能从式(5.2.50a)中消去位移分量，就可得到应变分量之间应满足的微分关系。为此，对式(5.2.50a)作两次协变导数(在笛卡尔坐标系中为偏导数)的运算，得

$$\varepsilon_{ij,kl}=\frac{1}{2}(u_{i,jkl}+u_{j,ikl}) \tag{5.2.71a}$$

改变自由指标，可得以下公式

$$\varepsilon_{kl,ij}=\frac{1}{2}(u_{k,lij}+u_{l,kij}) \tag{5.2.71b}$$

$$\varepsilon_{ik,jl}=\frac{1}{2}(u_{i,kjl}+u_{k,ijl}) \tag{5.2.71c}$$

$$\varepsilon_{jl,ik}=\frac{1}{2}(u_{j,lik}+u_{l,jik}) \tag{5.2.71d}$$

由式(5.2.71)立即可得

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{jl,ik}=0 \tag{5.2.72}$$

这就是**小变形的相容方程**。

也可以用另一种方法来消去式(5.2.50a)中的位移分量。因式(5.2.71a)的右边，$u_{i,jkl}$ 对 j,l 两个指标是对称的，$u_{j,ikl}$ 对于 i,k 两个指标也是对称的；而置换张量 ε^{jln} 和 ε^{ikm} 分别对于指标 j,l 和 i,k 是反对称的。我们知道，对称张量与反对称张量的内积为零。所以

$$u_{i,jkl}\varepsilon^{jln}=0$$

$$u_{j,ikl}\varepsilon^{ikm}=0$$

据此，我们将式(5.2.71a)两边都对 ε^{jln}，ε^{ikm} 取内积，便得

$$\varepsilon_{ij,kl}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{jln}=0 \tag{5.2.73}$$

上式中 m,n 为自由指标，上式共代表6个不同的方程，即取

$$m,n=1,1;2,2;3,3;1,2;2,3;3,1$$

若取 $m=n=3$，则由式(5.2.73)得

$$\varepsilon_{11,22}\varepsilon^{123}\varepsilon^{123}+\varepsilon_{12,21}\varepsilon^{123}\varepsilon^{213}+\varepsilon_{21,12}\varepsilon^{213}\varepsilon^{123}+\varepsilon_{22,11}\varepsilon^{213}\varepsilon^{213}=0$$

即

$$\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}-2\varepsilon_{12,12}=0$$

对于直角坐标系，上式可以写成

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{5.2.74a}$$

类似地，取 $m=n=1$ 和 $m=n=2$，可得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{yz}}{\partial y\partial z} \tag{5.2.74b}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial z^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{zx}}{\partial z\partial x} \tag{5.2.74c}$$

若取 $m = 2, n = 3$,则由式(5.2.73)得

$$\varepsilon_{11,32}\varepsilon^{132}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{12,31}\varepsilon^{132}\varepsilon^{213} + \varepsilon_{31,12}\varepsilon^{312}\varepsilon^{123} + \varepsilon_{32,11}\varepsilon^{312}\varepsilon^{213} = 0$$

即

$$-\varepsilon_{11,32} + \varepsilon_{12,31} + \varepsilon_{31,12} - \varepsilon_{32,11} = 0$$

或写成

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right) \tag{5.2.75a}$$

类似地,取 $m = 3, n = 1$ 和 $m = 1, n = 2$,可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) \tag{5.2.75b}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right) \tag{5.2.75c}$$

其实,方程组式(5.2.72)和式(5.2.73)是等价的,虽然在式(5.2.72)中有4个自由指标,共代表81个方程,但是其中基本的方程只有6个,其余的方程或者是重复的,或者是恒等式。

对于单连域来说,相容方程式(5.2.72)是保证位移单值连续的充分必要条件。

5.3 线弹性物质的本构方程

所谓**本构方程**,就是反映材料本身物理性质的一组方程。一般说来,不同的材料具有不同的物理性质,因此每种材料都有它本身所具有的本构方程。不仅如此,即使是同一种材料,在不同的条件下其表现出来的物理性质也常常有显著差异,也就是说决定材料本构方程的因素是复杂的,通常还与环境温度、环境压强、物体的运动速度,甚至还与时间 t、周围的电磁场等等因素有关。在此不想对这些因素展开讨论,本节的任务只是讨论经典弹性力学中所处理的一类物质,即线弹性物质的本构方程,在弹性力学中把它称为应力与应变的关系。

由于本构方程是材料本身物理性质的数学模型,因此它不可能是某种数学逻辑推理的结果,只有用实验结果来鉴定本构方程。由于本构方程取决于各种因素,因此常常需要给出各种限制条件,即立下种种假设,这样虽然使得给出的本构方程的适用范围大大缩小,但却不失为有效的科学手段。

5.3.1 各向同性材料的广义虎克定律

线弹性物质的应力与应变关系最一般的形式可表示为

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}) = f_{ij}(\varepsilon_{pq}) \tag{5.3.1}$$

在变形很小的情况下(即小变形假设下),式(5.3.1)可展开成泰勒级数,并可略去其二次以上的项,得到

$$\sigma_{ij} = (f_{ij})_0 + \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}}\right)_0 \varepsilon_{pq}$$

式中的 $\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}}\right)_0$ 表示函数 f_{ij} 对应变分量 ε_{pq} 的一阶偏导数在应变分量全为零时的值;而 $(f_{ij})_0$ 表示函数 f_{ij} 在应变分量全为零时的值,它实际上代表初始应力。

如果假设初始应力为零(即无预应力假设),则可化为线性齐次形式,并用 C_{ijpq} 代替 $\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \epsilon_{pq}}\right)_0$,可得

$$\sigma_{ij} = C_{ijpq}\varepsilon_{pq} \tag{5.3.2}$$

式(5.3.2) 就是**线弹性物质的本构方程**,事实上可以把它看作虎克定律在复杂受力情形下的推广,因此常常把它称为**广义虎克定律**。式中的 C_{ijpq} 称为**弹性系数**,不难证明它构成一个四阶笛卡尔张量,共有 81 个分量。由于 σ_{ij} 和 ε_{pq} 都是对称的,因此独立的分量只有 36 个。

值得指出,在连续介质中我们总是把每一个微体元看作一个平衡态,也就是说式(5.3.2) 中的弹性系数与质点有关。换句话说,C_{ijpq} 应是坐标 x_k 的函数。从物理角度看,意味着物体是由非均匀材料组成的,即各微体元的力学性质不同,各处反映出不同的弹性效应。但若物体是由均匀材料组成的(即再加上均匀性假设),即各微体元的力学性质都是相同的,具体来说,当物体由各质点承受同样的应力时,必产生同样的应变;反之,物体内各质点有相同的应变时,必承受同样的应力。均匀性假设反映在式(5.3.2) 中,就是意味着 C_{ijpq} 与坐标 x_k 无关,从而变成**弹性常数**。

还应指出,式(5.3.2) 所反映的应力与应变的关系是齐线性的,但从最简单的拉伸试验来说,当达到屈服应力时,应力与应变的关系不是线性的了。这就是说,只有在弹性范围内才可应用式(5.3.2) 作为本构方程,这就是所谓的**完全弹性假设**。

最后,我们假设物质是各向同性的(即各向同性假设)。所谓**各向同性**,从物理角度来说,就是沿物体的所有方向其弹性性质都是一样的。具体地说,如果从均匀的各向同性体中切出无数个方位不同的微体元,则当这些微体元承受相同的应力时将产生相同的应变;反之,如果应变相同则必然承受相同的应力。这一物理性质反映在数学上,就是应力与应变关系在所有方位不同的直角笛卡尔坐标系中都是一样的。这就是说,四阶张量 C_{ijpq} 在任意笛卡尔坐标变换下,其每一个分量都不变。由此可见,四阶张量 C_{ijpq} 是各向同性张量,且因 C_{ijpq} 对两组指标 ij 和 pq 都是对称的,根据 2.8 中关于四阶各向同性张量的定理及其推论知,该四阶张量只有两个独立的常数,并可表示为

$$C_{ijpq} = \lambda\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}) \tag{5.3.3}$$

把上式代入式(5.3.2),得

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{5.3.4a}$$

或

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda\, \mathrm{I}_E \boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} \tag{5.3.4b}$$

这就是各向同性体的广义虎克定律,式中的常数 λ 和 μ 称为**拉梅(Lame')常数**。它就是**线弹性物质的本构方程**。

当然可以毫无困难地求出该方程的逆,得到用应力表示应变的形式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \tag{5.3.5a}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \frac{-\lambda\, \mathrm{I}_\Sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\boldsymbol{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.3.5b}$$

显然,式(5.3.4) 与式(5.3.5) 是等价的。

5.3.2 弹性常数的测定

上面的应力与应变关系式(5.3.4) 和式(5.3.5) 当然适用于简单拉伸和纯剪这两种特殊情形，因此，我们可以借助于对某一材料的简单拉伸试验与纯剪试验来测定该材料的弹性常数 λ 和 μ。

首先在简单拉伸试验下，如将试件的拉伸方向取作 x_1 轴方向，则有

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \tag{a}$$

将式(a) 代入式(5.3.5)，得到

$$\begin{aligned} \varepsilon^{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{31} = 0 \end{aligned} \tag{b}$$

另一方面，根据简单拉伸试验可得如下结果

$$\begin{aligned} \varepsilon^{11} &= \frac{1}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{11} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{31} = 0 \end{aligned} \tag{c}$$

式中，E 称为杨(Young) 氏弹性模量，ν 称为泊松(Poisson) 比。比较式(b) 和(c)，即得

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

或者反解出 λ 和 μ 有

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

因为根据试验恒有

$$E > 0,\ 0 < \nu < \frac{1}{2} \tag{5.3.8}$$

所以有

$$\lambda > 0,\ \mu > 0 \tag{5.3.9}$$

再考察纯剪试验，假定剪应力作用在 x_1x_2 平面内，于是有

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{32} = 0 \tag{d}$$

把式(d) 代入式(5.3.5) 得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{32} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} \end{aligned} \tag{e}$$

另一方面，由纯剪试验可得如下结果

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{32} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12} \tag{f}$$

式中，G 称为**剪切模量**。比较式(e) 和(f) 得

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{5.3.10}$$

把式(5.3.7) 代入式(5.3.5)，得到用 E 和 ν 表示的广义虎克定律

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right) \tag{5.3.11a}$$

或

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{E} + \frac{\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{I}\theta\right) \tag{5.3.11b}$$

式中 $\theta = \varepsilon_{kk}$，或者取其逆

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{5.3.12a}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\nu}{E}\boldsymbol{I}\Theta \tag{5.3.12b}$$

式中 $\Theta = \sigma_{kk}$。上式是常用的，它的展开式为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})] \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\
\varepsilon_{31} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}
\end{aligned} \tag{5.3.12c}$$

由上式，很容易得到体积应变为

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\Theta \tag{5.3.13}$$

式(5.3.13) 常称为**体积应变的虎克定律**。令

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda+2\mu}{3} \tag{5.3.14}$$

通常把 k 称为**体积模量**。

5.4 线弹性基本方程及其在常用物理标架下的实用表达式

线弹性的基本方程包含下列 3 组方程，它们的不变性记法有以下 3 种。

(1) 平衡方程式(5.1.16b)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \boldsymbol{b} = 0$$

(2) 本构方程式(5.3.12b)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\Sigma} - \frac{\nu}{E}\boldsymbol{I}\Theta$$

(3) 几何方程式(5.2.50b)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\nabla + \nabla\boldsymbol{u})$$

共有15个方程,正巧含有15个未知量,它们是6个应力分量,6个应变分量和3个位移分量。

在具体解决力学问题时,常常采用物理标架下的实用性记法。所谓实用性记法是:对于正应力或正应变常常采用一个字母下标,表示对应轴向的量,例如,σ_x 表示 x 轴方向的正应力,ϵ_θ 表示在圆柱坐标系的物理标架下 $\boldsymbol{\theta}^0$ 方向的正应变;剪应力用 τ 表示,带有两个字母下标,而剪应变采用工程剪应变用 γ 表示,也带有两个字母下标,它们的意义是不言而喻的。

下面就三种常用的物理标架写出基本方程的实用表达式。

5.4.1 笛卡尔坐标系

坐标 x_1, x_2, x_3 分别用 x, y, z 代替,轴向单位向量用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示。位移矢量为

$$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$$

而单位体积的体积力为

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

(1) 平衡方程式(5.1.21b)的实用表达式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned} \tag{5.4.1}$$

(2) 本构方程式(5.3.12c)的实用表达式

$$\begin{aligned}
&\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\
&\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} \\
&\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

(3) 几何方程式(5.2.50c)的实用表达式

$$\begin{aligned}
&\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
&\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
&\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

5.4.2 圆柱坐标系

坐标

$$r = x^1, \theta = x^2, z = x^3$$

局部物理标架 $\qquad g_{(1)} = r^0, g_{(2)} = \theta^0, g_{(3)} = k$

位移的物理分量表达式

$$u = u_r r^0 + u_\theta \theta^0 + u_z k \tag{5.4.4}$$

单位体积的体积力的物理分量表达式

$$F = F_r r^0 + F_\theta \theta^0 + F_z k \tag{5.4.5}$$

应力张量的物理分量表示式

$$\Sigma = \sigma_r r^0 r^0 + \tau_{r\theta} r^0 \theta^0 + \tau_{rz} r^0 k + \tau_{\theta r} \theta^0 r^0 + \sigma_\theta \theta^0 \theta^0 + \tau_{\theta z} \theta^0 k + \tau_{zr} k r^0 + \tau_{z\theta} k \theta^0 + \sigma_z k k \tag{5.4.6}$$

应变张量的物理分量表达式

$$E = \epsilon_r r^0 r^0 + \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} r^0 \theta^0 + \frac{1}{2}\gamma_{rz} r^0 k + \frac{1}{2}\gamma_{\theta r} \theta^0 r^0 + \epsilon_\theta \theta^0 \theta^0$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} \theta^0 k + \frac{1}{2}\gamma_{zr} k r^0 + \frac{1}{2}\gamma_{z\theta} k \theta^0 + \epsilon_z k k \tag{5.4.7}$$

注意,其中 $\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r}, \gamma_{rz} = \gamma_{zr}, \gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta}$ 都表示相应两正交方向的直角改变量,即都是工程剪应变,所以对应的张量剪应变都应除以 2。

(1) 平衡方程,由第三章式(3.8.20) 为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_\theta}{r} + F_r = 0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r}}{r} + F_\theta = 0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0
\end{aligned} \tag{5.4.8}$$

(2) 本构方程仍可按式(5.3.12c) 给出

$$\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]\\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)]\\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\\
\gamma_{\theta z} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\theta z}\\
\gamma_{zr} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zr}\\
\gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta}
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

(3) 几何方程,由第三章式(3.8.16) 可得到 ∇u 的 9 个物理分量。因为 $\nabla u = (\nabla u)_c$,即只要转置一下,再取两者的算术平均,因此容易求出为

$$\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)\\
\epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) \tag{5.4.10}$$

5.4.3 球坐标系

坐标 $r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$

局部物理标架 $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{g}_{(2)} = \boldsymbol{\theta}^0, \boldsymbol{g}_{(3)} = \boldsymbol{\varphi}^0$

位移的物理分量表达式

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{r}^0 + u_\theta\boldsymbol{\theta}^0 + u_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0 \tag{5.4.11}$$

单位体积的体积力的物理分量表达式

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{r}^0 + F_\theta\boldsymbol{\theta}^0 + F_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0 \tag{5.4.12}$$

应力张量的物理分量表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} = {} & \sigma_r\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{r}^0 + \tau_{r\theta}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \tau_{r\varphi}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\varphi}^0 + \tau_{\theta r}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{r}^0 + \sigma_\theta\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \tau_{\theta\varphi}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\varphi}^0 \\ & + \tau_{\varphi r}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{r}^0 + \tau_{\varphi\theta}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \sigma_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\varphi}^0\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

应变张量的物理分量表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = {} & \varepsilon_r\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{r\theta}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi}\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{\varphi}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{\theta r}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{r}^0 + \varepsilon_\theta\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{\theta\varphi}\boldsymbol{\theta}^0\boldsymbol{\varphi}^0 \\ & + \frac{1}{2}\gamma_{\varphi r}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{r}^0 + \frac{1}{2}\gamma_{\varphi\theta}\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\theta}^0 + \varepsilon_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0\boldsymbol{\varphi}^0\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

同圆柱坐标系相类似，$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r}, \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r}, \gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\theta}$ 都表示相应两正交方向的直角改变量，也是工程剪应变，所以对应的张量剪应变都是直角改变量的$\frac{1}{2}$。

(1) 平衡方程，由第三章式(3.8.31)知

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\sigma_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\tau_{r\theta})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} - \frac{\sigma_\theta + \sigma_\varphi}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\sigma_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\tau_{r\theta} - \cot\theta\sigma_\varphi}{r} + F_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{\varphi r})}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\tau_{\varphi\theta})}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\tau_{r\varphi} + \cot\theta\tau_{\theta\varphi}}{r} + F_\varphi = 0 \tag{5.4.15}$$

(2) 本构方程仍可按式(5.3.12c)给出

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_\varphi)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\theta\varphi}$$

$$\gamma_{\varphi r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\varphi r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta} \tag{5.4.16}$$

(3) 几何方程，由第三章式(3.8.26)给出$\nabla \boldsymbol{u}$的9个物理分量，再取转置后相加，取算术平均值即得

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) \\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r + \cot\theta u_\theta}{r} \\
\gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\cot\theta}{r}u_\varphi \\
\gamma_{\varphi r} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

*5.5 张量方程

前面我们曾讨论过，倘若一个张量在某个坐标系中，其分量都等于零，那么，在其他一切坐标系中，该张量的分量也都为零。这是张量的一个重要性质。由这一性质可以导出张量方程的一个重要特性：**一个张量方程，倘若在某个坐标系中成立，那么，在其他一切坐标系中，该张量方程也同样成立。**

张量方程的这一特性给我们建立物理方程提供了一个十分有效的手段。因为若干物理量或几何量之间的关系往往在某个特殊坐标系（例如笛卡尔坐标系）中比较容易建立。如果我们把这种关系用张量方程来表示，那么这个张量方程对于其他一切坐标系都是有效的。换言之，在某个特殊坐标系中建立起来的方程，可以通过张量语言的“翻译”，而得到对于一切坐标系都普遍有效的方程。

为解决具体物理问题的方便，往往需要选择各种不同的坐标系，但在不同坐标系中，张量分量所满足的方程具有不同的形式。如何由笛卡尔坐标系中相对简单的张量分量方程得到任意曲线坐标系中的张量分量方程呢?这就需要应用张量分析的方法。

下面我们举一个实例说明用物理量在曲线坐标系中的分量来表示张量方程的步骤。

线弹性体的运动方程在笛卡尔坐标系中可表示为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x &= \rho w_x \\
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho f_y &= \rho w_y \\
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z &= \rho w_z
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

应用求和约定将式(5.5.1)写成指标形式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho f_i = \rho w_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{5.5.1a}$$

上升或下降指标,使哑指标一上一下,自由指标在同一水平位置,使式(5.5.1a)变为

$$\frac{\partial \sigma_i^{\cdot j}}{\partial x^j} + \rho f_i = \rho w_i$$

或

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho f^i = \rho w^i \qquad (i = 1,2,3) \tag{5.5.1b}$$

最后将笛卡尔坐标系改为曲线坐标系,把式(5.5.1b)写成

$$\sigma_{i;j}^{\cdot j} + \rho f_i = \rho w_i$$

或

$$\sigma^{ij}_{;j} + \rho f^i = \rho w^i \qquad (i = 1,2,3) \tag{5.5.1c}$$

式(5.5.1c)就是适合一切坐标系的张量方程。

习 题 五

5.1　已知点 P 处的应力张量为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) 求点 P 处单位法向为 $\boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 的平面上的表面牵引力矢 $\boldsymbol{t}^{(n)}$;

(b) 求 $\boldsymbol{t}^{(n)}$ 垂直于该平面的分量;

(c) 求表面牵引力矢量 $\boldsymbol{t}^{(n)}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角。

5.2　设一点处的应力张量为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 σ_{22} 未定。试确定 σ_{22},使得在该点处某个平面上的应力矢量等于零,并给出该平面的单位法向矢量。

5.3　一点处的应力状态由应力张量

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

给出。试确定 a,b,c,使得在该点以 $\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 为外法线方向的平面上的应力矢量等于零。

5.4　一点处的应力状态关于笛卡尔坐标系 $ox_1x_2x_3$ 的应力张量由

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}
$$

给出。新坐标系 $ox_1'x_2'x_3'$ 是按坐标变换矩阵

$$
[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

关于 $ox_1x_2x_3$ 旋转而得。求在坐标系 $ox_1'x_2'x_3'$ 下应力张量的对应矩阵。

5.5　连续介质的应力场为

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}
$$



试求：当对整个场都满足平衡方程时体积力的分布规律。

5.6　求下列应力张量的主应力值

$$
(a)\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
(b)\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

并试证明两者有相同的主方向。

5.7　对于应力张量

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}
$$

求它的主应力和 3 个应力主不变量。

5.8　试把应力张量

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{bmatrix}
$$

分解为应力球形张量与应力偏斜张量之和，并求主偏应力。

5.9　设物体上各点处的应力状态由应力张量场给出为

$$
\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & cx_3 & 0 \\ cx_3 & 0 & -cx_1 \\ 0 & -cx_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

其中 c 是任意常数。

(a) 证明当体积力为零时，满足平衡方程；

(b) 求在点 $P(4,-4,7)$ 处作用在平面 $2x_1+2x_2-x_3=-7$ 以及球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=81$ 上的应力矢量；

(c) 计算上述点 P 处的主应力、最大剪应力和主偏应力。

5.10　对于重合的物质和空间轴系，已知物体的位移矢量

$$\boldsymbol{u}=4\xi_1^2\boldsymbol{e}_1+\xi_2\xi_3^2\boldsymbol{e}_2+\xi_1\xi_3^2\boldsymbol{e}_3$$

求初始位于点(1,0,2) 的质点经过位移后的坐标。

5.11　连续介质物体受位移

$$\boldsymbol{u}=(3\xi_2-4\xi_3)\boldsymbol{e}_1+(2\xi_1-\xi_3)\boldsymbol{e}_2+(4\xi_2-\xi_1)\boldsymbol{e}_3$$

求联结质点(1,0,3) 和(3,6,6) 的矢量在位移后的对应矢量。

5.12　一物体经历均匀变形

$$x_1=\sqrt{2}\xi_1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\xi_2$$

$$x_2=-\xi_1+\frac{3}{4}\xi_2+\frac{\sqrt{2}}{4}\xi_3$$

$$x_3=\xi_1-\frac{3}{4}\xi_2+\frac{\sqrt{2}}{4}\xi_3$$

求：

(a) 在初始构形中具有方向比 1 : 1 : 1 的线元在变形后的方向；

(b) 这个线元的伸长比。

5.13　一位移场由

$$\boldsymbol{u}=\xi_1^2\xi_2\boldsymbol{e}_1+(\xi_2-\xi_3^2)\boldsymbol{e}_2+\xi_2^2\xi_3\boldsymbol{e}_3$$

给出。求出点 $P_0(1,2,-1)$ 处 $-\xi_2$ 轴向的线元在变形后的方向和它的伸长比。

5.14　对于剪切变形

$$x_1=\xi_1$$

$$x_2=\xi_2$$

$$x_3=\xi_3+\frac{2}{\sqrt{3}}\xi_2$$

求在 $\xi_2\xi_3$ 平面上其伸长比为 1 的线元方向。

5.15　一位移场由

$$\boldsymbol{u}=\xi_1\xi_3^2\boldsymbol{e}_1+\xi_2\xi_1^2\boldsymbol{e}_2+\xi_3\xi_2^2\boldsymbol{e}_3$$

给出。试求物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 和物质位移梯度 $\boldsymbol{J}$。

5.16　一连续介质物体受变形

$$x_1=\xi_1$$

$$x_2=\xi_2+A\xi_3$$

$$x_3=\xi_3+A\xi_2$$

其中 A 是常数。求格林变形张量 $\boldsymbol{G}$ 和拉格朗日有限应变张量 $\boldsymbol{L}$。

5.17　已知变形场为

$$x_1=\xi_1+2\xi_2$$

$$x_2 = \xi_2 - 2\xi_3$$
$$x_3 = \xi_3 - 2\xi_1 + 2\xi_2$$

试求空间变形梯度 $\boldsymbol{H}$,空间位移梯度 $\boldsymbol{K}$ 和柯西变形张量 $\boldsymbol{C}$。

5.18　对于题 5.16 给出的变形,求物质变形梯度 $\boldsymbol{F}$,并通过 $\boldsymbol{F}$ 的极分解求右伸长张量和旋转张量。

5.19　对于由 $\boldsymbol{u} = (\xi_1 - \xi_3)^2\boldsymbol{e}_1 + (\xi_2 + \xi_3)^2\boldsymbol{e}_2 - \xi_1\xi_2\boldsymbol{e}_3$ 给出的位移场,从形式上求出在点 $P(0,2,-1)$ 处的线性应变张量、线性旋转张量和旋转矢量。

5.20　对于题 5.19 的位移场,求在点 $P(0,2,-1)$ 处沿着方向 $\boldsymbol{v} = \frac{1}{9}(8\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3)$ 的正应变。

5.21　一点处的线性应变张量为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{1\,000}\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

求:在 $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_3$ 方向的正应变,以及它与正交方向 $\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_3$ 之间的工程剪应变。

5.22　写出题 5.21 中给出的线性应变张量的 3 个主不变量。

5.23　一小变形在形式上由位移场

$$u_1 = 4\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3$$
$$u_2 = \xi_1 + 7\xi_2$$
$$u_3 = -3\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3$$

给出。求主应变分量和主偏应变分量。

6　张量分析在流体力学中的应用

近年来，张量分析在流体力学中的应用日益广泛。采用张量形式的基本方程来求解问题与日俱增，因此在介绍有关张量分析的知识之后，有必要再介绍一些张量分析在流体力学中应用的基础知识。

6.1　流体力学中各种物理量的张量形式

为了应用张量来分析流体力学问题，就应当写出流体力学中可能遇到的物理量的张量形式。下面就一些经常遇到的物理量加以讨论。

6.1.1　动能的表达式

设流体质量为 m，运动速度为$\boldsymbol{v}$，由动能定义

$$E_d = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

由于

$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i = v_i\boldsymbol{e}^i$$

以及

$$v_i = g_{ij}v^j$$

可以得到动能的表达式为

$$E_d = \frac{1}{2}mv^iv_i = \frac{1}{2}mg_{ij}v^iv^j \tag{6.1.1}$$

6.1.2　单位质量的质量力

如令单位质量的质量力为 $\boldsymbol{f}$，则

$$\boldsymbol{f} = f^i\boldsymbol{e}_i = f^ig_{ij}\boldsymbol{e}^j \tag{6.1.2}$$

式中，f^i 为$\boldsymbol{f}$ 的逆变分量。

6.1.3　速度环量的表达式

由速度环量的定义，得

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P$$

因为

$$\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}^i$$

而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{e}_j\mathrm{d}x^j$$

所以

$$\Gamma = \oint v_i (\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j) \mathrm{d}x^j = \oint v_i \delta^i_j \mathrm{d}x^j = \oint v_i \mathrm{d}x^i \tag{6.1.3}$$

6.1.4 质量流量 Q 的表达式

根据质量流量的定义,通过任一微元面积 $\mathrm{d}\sigma$ 的微元质量流量为

$$\mathrm{d}Q = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}^i \mathrm{d}S_i$$

因为

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l}^i = V^i$$

$$\mathrm{d}S_i = \sqrt{g}\sqrt{g^{ii}}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k$$

所以

$$\mathrm{d}Q = \rho V^i \mathrm{d}S_i$$

展开上式,得

$$\mathrm{d}Q = \rho\sqrt{g}(V^1\sqrt{g^{11}}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + V^2\sqrt{g^{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + V^3\sqrt{g^{33}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2) \tag{6.1.4a}$$

或

$$\mathrm{d}Q = \rho\sqrt{g}(v^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + v^2\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + v^3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2) \tag{6.1.4b}$$

6.2 流线与迹线的表达式

6.2.1 流线

流线与迹线是流体力学中的重要概念。所谓**流线**就是在给定瞬时,由流体微团组成的曲线,在这条曲线上,每一流体微团的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 均与该曲线相切。由这一定义出发,运用矢量的矢性积,可得

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{0} \tag{6.2.1}$$

式中,$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P$ 是流线上的微元位置矢量,$\boldsymbol{v}$ 是该瞬时流线上流体微团的运动速度。

令

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{e}_j \mathrm{d}x^j$$

将它们代入式(6.2.1),可得

$$v^i \mathrm{d}x^j (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_{ijk}\sqrt{g}v^i\mathrm{d}x^j\boldsymbol{e}^k = 0$$

由于上式是零矢量的表达式,因而其各分量必须等于零,即

$$\begin{aligned} v^1\mathrm{d}x^2 - v^2\mathrm{d}x^1 &= 0 \\ v^2\mathrm{d}x^3 - v^3\mathrm{d}x^2 &= 0 \\ v^3\mathrm{d}x^1 - v^1\mathrm{d}x^3 &= 0 \end{aligned} \tag{6.2.2a}$$

或

$$\frac{v^1}{\mathrm{d}x^1} = \frac{v^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{v^3}{\mathrm{d}x^3} \tag{6.2.2b}$$

对于圆柱坐标系,因为有

$$v^1 = v_r$$
$$v^2 = \frac{1}{r}v_\varphi$$
$$v^3 = v_z$$

而

$$dx^1 = dr$$
$$dx^2 = d\varphi$$
$$dx^3 = dz$$

所以

$$\frac{v_r}{dr} = \frac{v_\varphi}{r d\varphi} = \frac{v_z}{dz} \tag{6.2.3}$$

6.2.2 迹线

迹线可由定义式

$$d\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{v} dt \tag{6.2.4}$$

以及

$$d\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{e}_i dx^i$$
$$\boldsymbol{v} = v^j \boldsymbol{e}_j$$

得

$$(dx^i - v^i dt)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$$

或

$$dx^i = v^i dt \tag{6.2.5}$$

对于圆柱坐标系,则为

$$dr = v_r dt$$
$$d\varphi = \frac{1}{r}v_\varphi dt$$
$$dz = v_z dt \tag{6.2.6}$$

6.3 曲线坐标系下速度$\boldsymbol{v}$的散度定义式

在实际问题中,任何质点(或微团)总是有一定体积的,因而在分析质点运动的同时,也应当分析其体积在运动过程中的变化情况。

已知在曲线坐标系下的微元体积为 dV,其表达式为

$$dV = \sqrt{g}dx^1 dx^2 dx^3$$

当此体积以质点的运动速度$\boldsymbol{v}$做运动时,其大小、形状均将发生变化,如令

$$\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} \tag{6.3.1}$$

为此**体积的相对变化率**,则其表达式可求得如下:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1' = \left(\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^1$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2' = \left(\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3' = \left(\boldsymbol{e}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x^3$$

式中,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1'$,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2'$,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3'$ 分别表示变形后的微元体积边长矢量。

于是,变形后的体积 $\mathrm{d}V'$ 为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V' &= \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1' \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2' \times \mathrm{d}\boldsymbol{S}_3') \\ &= \left(\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1}\mathrm{d}t\right) \cdot \left[\left(\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2}\mathrm{d}t\right) \times \left(\boldsymbol{e}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\ &= [\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1} \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + \boldsymbol{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2} \times \boldsymbol{e}_3\right)\right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{e}_1 \cdot \left(\boldsymbol{e}_2 \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3}\right)\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t\end{aligned}$$

注意,此处已略去了 $\mathrm{d}t$ 的高阶小量。但由于

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x^3 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}V$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^1} &= (\nabla_1 \boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{e}_h \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^2} &= (\nabla_2 \boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{e}_h \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^3} &= (\nabla_3 \boldsymbol{v}^h)\boldsymbol{e}_h\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

把它们代入 $\mathrm{d}V'$ 的表达式后,得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V + \{&(\nabla_1 v^h)\boldsymbol{e}_h \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + \boldsymbol{e}_1 \cdot [((\nabla_2 v^h)\boldsymbol{e}_h) \times \boldsymbol{e}_3] \\ &+ \boldsymbol{e}_1 \cdot [\boldsymbol{e}_2 \times ((\nabla_3 v^h)\boldsymbol{e}_h)\boldsymbol{e}_h]\}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t\end{aligned}$$

再利用矢量的数性三重积的性质,上式可改写成

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V + [\nabla_1 v^1 + \nabla_2 v^2 + \nabla_3 v^3][\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

或

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V + (\nabla_i v^i)\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

令

$$\mathrm{D}(\mathrm{d}V) = \mathrm{d}V' - \mathrm{d}V$$

于是得

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V\mathrm{d}t} = \nabla_i v^i = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \tag{6.3.3}$$

这就是曲线坐标系下速度 $\boldsymbol{v}$ 的散度表达式。

6.4 本构方程

在任意曲线坐标系下,流体的应力与应变关系式是流体力学的重要方程之一,为了求得

这一方程,先对应力作一分析。

应用二阶张量的逆变变换式,求得曲线坐标系下静压力 $-p$ 的逆变分量。

假定老坐标系为 y^i,新坐标为 x^i。对于笛卡尔坐标系,其逆变分量即为投影分量,张量形式为

$$p_{nm}=\begin{cases}-p & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases} \tag{6.4.1a}$$

或

$$p_{nm}=(-p)\delta_{nm} \tag{6.4.1b}$$

如果令 σ^{ij} 为静压力在曲线坐标系下的逆变分量,由二阶张量的逆变变换,应有

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}p_{nm} \tag{6.4.2}$$

将式(6.4.1)代入式(6.4.2),得

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}(-p)$$

因$\frac{\partial x^i}{\partial y^n}$,$\frac{\partial x^j}{\partial y^m}$ 分别是 $\boldsymbol{e}^i$,$\boldsymbol{e}^j$ 的对应分量,所以

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\frac{\partial x^j}{\partial y^m}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j=g^{ij}$$

由此可得流体静压力的逆变分量表达式为

$$\sigma^{ij}=-pg^{ij} \tag{6.4.3}$$

如果 T^{ij} 为粘性流体应力的逆变分量,p^{ij} 为附加应力的逆变分量,则由流体力学知识,应有

$$T^{ij}=\sigma^{ij}+p^{ij} \tag{6.4.4}$$

对于牛顿流体,存在下列关系式

$$p^{ij}=E^{ijlm}S_{lm} \tag{6.4.5}$$

式中,E^{ijlm} 为四阶各向同性张量,而 S_{lm} 为应变率张量的协变分量。

完全模仿笛卡尔坐标系下四阶各向同性张量的表达式(2.8.8),应用二阶张量的逆变变换式,将 δ_{ij} 变换为 g^{ij},则

$$E^{ijlm}=\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl}) \tag{6.4.6}$$

将式(6.4.3),式(6.4.5),式(6.4.6)代入式(6.4.4),得

$$T^{ij}=-pg^{ij}+[\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})]S_{lm}$$

由于

$$g^{lm}S_{lm}=S_m^m$$
$$g^{li}g^{jm}S_{lm}=S^{ij}$$
$$g^{im}g^{jl}S_{lm}=S^{ij}$$

因此

$$T^{ij}=(-p+\lambda S_m^m)g^{ij}+2\mu S^{ij} \tag{6.4.7}$$

将上式两边均乘以 g_{jl},得

$$g_{jl}T^{ij}=(-p+\lambda S_m^m)g^{ij}g_{jl}+2\mu S^{ij}g_{jl}$$

或写成

$$T_l^i = (-p + \lambda S_m^m)\delta_l^i + 2\mu S_l^i$$

如令 $i = l$，则上式可写成

$$T_i^i = (-p + \lambda S_m^m)\delta_i^i + 2\mu S_i^i$$

由于

$$\delta_i^i = 3$$

$$T_i^i = -3p(\text{斯托克斯流体})$$

则

$$-3p = -3p + 3\lambda S_m^m + 2\mu S_i^i$$

或写成

$$S_i^i(3\lambda + 2\mu) = 0$$

在一般情况下，S_i^i 不为零，所以

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

或

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

于是可得曲线坐标系下的**本构方程**为

$$T^{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu S_m^m\right)g^{ij} + 2\mu S^{ij} \tag{6.4.8}$$

如以张量表示，则

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} + \lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{S} \tag{6.4.9}$$

对于斯托克斯流体，则为

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I} - \frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{S} \tag{6.4.10}$$

应用以上结果，可求得圆柱坐标系、球坐标系下应力诸物理分量的表达式。

对于圆柱坐标系

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v} \\
\tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r}\right) + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v} \\
\tau_{zz} &= -p + 2\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v} \\
\tau_{r\varphi} &= \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right) \\
\tau_{\varphi z} &= \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right) \\
\tau_{zr} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

对于球坐标系

$$\tau_{RR} = -p + 2\mu\frac{\partial v_R}{\partial R} + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_R}{R}\right) + \lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_\theta}{R}\cot\theta + \frac{v_R}{R}\right) + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

$$\tau_{R\theta} = \mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_R}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{v_\theta}{R}\right)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{R}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{v_\varphi}{R}\cot\varphi\right)$$

$$\tau_{\varphi R} = \mu\left(\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_R}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} - \frac{v_\varphi}{R}\right) \tag{6.4.12}$$

6.5 曲线坐标系下的切应力互等定律

在流场中任取一点 $P(x^1, x^2, x^3)$，如图 6－1 所示，以 P 点为角点，取

$$x^1 = \text{const}, \quad x^1 + \mathrm{d}x^1 = \text{const}$$
$$x^2 = \text{const}, \quad x^2 + \mathrm{d}x^2 = \text{const}$$
$$x^3 = \text{const}, \quad x^3 + \mathrm{d}x^3 = \text{const}$$

为棱边的斜六面体，各对应面的面积分别为

$$\mathrm{d}S_1 = |\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}x^2 \times \boldsymbol{e}_3\mathrm{d}x^3| = \sqrt{g}\sqrt{g^{11}}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$
$$= \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}S_2 = \sqrt{g_{11}g_{33} - g_{13}^2}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 = \sqrt{g}\sqrt{g^{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3$$

$$\mathrm{d}S_3 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 = \sqrt{g}\sqrt{g^{33}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$$

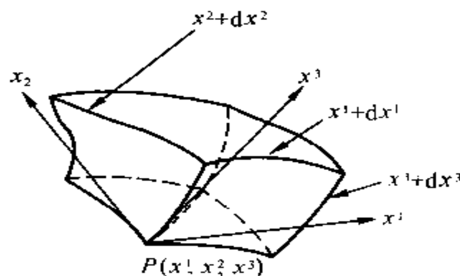


图 6－1　切应力互等

作用在 P 点各对应面上的表面力是

$$-\boldsymbol{T}^1\mathrm{d}S_1,\ -\boldsymbol{T}^2\mathrm{d}S_2,\ -\boldsymbol{T}^3\mathrm{d}S_3$$

式中，$\boldsymbol{T}^i$ 表示作用在外法线方向为 $-\boldsymbol{l}^i$ 之微元曲面上的应力，这些应力可向基矢量方向分解，即

$$\boldsymbol{T}^1 = T^{1m}\boldsymbol{e}_m$$
$$\boldsymbol{T}^2 = T^{2m}\boldsymbol{e}_m$$
$$\boldsymbol{T}^3 = T^{3m}\boldsymbol{e}_m$$

式中，T^{1m}, T^{2m}, T^{3m} 分别表示 $\boldsymbol{T}^1, \boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{T}^3$ 的逆变分量，取负值则表示表面的外法线方向与逆变基矢量方向相反。

下面求外力对点 $P(x^1, x^2, x^3)$ 的力矩方程。现假设

1. 表面力作用于各对应表面的中心；
2. 各表面沿 x^i 方向的变化量对力矩的贡献可忽略不计；
3. 质量力对力矩的贡献，与表面力相比可忽略不计。

这样，表面 $\mathrm{d}S_1$ 上的表面力对点 $P(x^1, x^2, x^3)$ 的力矩应是

$$-\left[\left(\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}x^1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}x^3\right) \times (T^{1m}\boldsymbol{e}_m)\,\mathrm{d}S_1\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}x^2 + \boldsymbol{e}_3\mathrm{d}x^3) \times (T^{1m}\boldsymbol{e}_m)\,\mathrm{d}S_1\right]$$

$$= \sqrt{g}(T^{12}\boldsymbol{e}^3 - T^{13}\boldsymbol{e}^2)\sqrt{g}\sqrt{g^{11}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

同理,表面 $\mathrm{d}S_2$,$\mathrm{d}S_3$ 上的表面力对 P 点的力矩分别是

$$\sqrt{g}(T^{23}\boldsymbol{e}^1 - T^{21}\boldsymbol{e}^3)\sqrt{g}\sqrt{g^{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

$$\sqrt{g}(T^{31}\boldsymbol{e}^2 - T^{32}\boldsymbol{e}^1)\sqrt{g}\sqrt{g^{33}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

根据假设,体积力和表面力相比为高阶无穷小,体积力对点 $P(x^1,x^2,x^3)$ 的力矩贡献可以忽略不计。因此得

$$(\boldsymbol{e}^3T^{12} - \boldsymbol{e}^2T^{13})\sqrt{g^{11}} + (\boldsymbol{e}^1T^{23} - \boldsymbol{e}^3T^{21})\sqrt{g^{22}} + (\boldsymbol{e}^2T^{31} - \boldsymbol{e}^1T^{32})\sqrt{g^{33}} = \boldsymbol{0}$$

或者

$$\boldsymbol{e}^1(\sqrt{g^{22}}T^{23} - \sqrt{g^{33}}T^{32}) + \boldsymbol{e}^2(\sqrt{g^{11}}T^{13} - \sqrt{g^{33}}T^{31}) + \boldsymbol{e}^3(\sqrt{g^{11}}T^{12} - \sqrt{g^{22}}T^{21}) = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{e}^m$ 不为零,所以有

$$\begin{aligned}\sqrt{g^{22}}T^{23} - \sqrt{g^{33}}T^{32} &= 0\\ \sqrt{g^{11}}T^{13} - \sqrt{g^{33}}T^{31} &= 0\\ \sqrt{g^{11}}T^{12} - \sqrt{g^{22}}T^{21} &= 0\end{aligned} \tag{6.5.1a}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{T^{23}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{T^{32}}{\sqrt{g^{22}}} &= 0\\ \frac{T^{13}}{\sqrt{g^{33}}} - \frac{T^{31}}{\sqrt{g^{11}}} &= 0\\ \frac{T^{12}}{\sqrt{g^{22}}} - \frac{T^{21}}{\sqrt{g^{11}}} &= 0\end{aligned} \tag{6.5.1b}$$

由逆变分量与物理分量之间的关系,令 τ^{ij} 表示对应的物理分量,则

$$\tau^{ij} = \frac{T^{ij}}{\sqrt{g^{jj}}} \tag{6.5.2}$$

于是得

$$\begin{aligned}\tau^{23} &= \tau^{32}\\ \tau^{13} &= \tau^{31}\\ \tau^{12} &= \tau^{21}\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

上式表明,切应力的物理分量互等。这就证明了在曲线坐标系下**切应力互等定律**。

6.6 连续方程

在推导连续方程时,对微元控制体的选取方式可有多种,较常用的有:微元控制体静止不动;微元控制体随流体一起运动。为了对连续方程的导出有较全面的了解,我们分别采用两种方法。

6.6.1　微元控制体静止不动

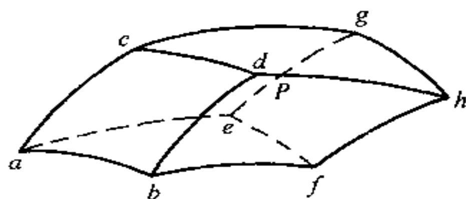


图 6－2　连续方程

如图 6－2 所示，设在流场中任取一点 P，以 P 为中心取一微元斜六面体 $abcdefgh$，如前所述，微元斜六面体各边均由坐标曲线构成，并设

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{e}_1 \mathrm{d}x^1$$
$$\boldsymbol{ae} = \boldsymbol{e}_2 \mathrm{d}x^2$$
$$\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{e}_3 \mathrm{d}x^3$$

于是，由这三条曲边构成的曲面积应是

$$\square abcd = \sqrt{g}\sqrt{g^{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 = \sqrt{G_{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3$$
$$\square abef = \sqrt{G_{33}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$$
$$\square aceg = \sqrt{G_{11}}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

式中

$$\begin{aligned} G_{11} &= gg^{11} \\ G_{22} &= gg^{22} \\ G_{33} &= gg^{33} \end{aligned} \qquad (6.6.1)$$

而微元体积则为

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

由于所取的是微元控制体，上述各曲面上的流动参数（如速度 $\boldsymbol{v}$，密度 ρ 等）均可用点 a 处的流动参数代替，因此 $\square abcd$ 在 $\mathrm{d}t$ 内进入控制体的流体质量应为

$$\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

式中，$v_{逆}^2$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 的逆变物理分量。

由 $\square efgh$ 在 $\mathrm{d}t$ 内流出控制体的流体质量为

$$\left[\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}} + \frac{\partial}{\partial x^2}\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}}\mathrm{d}x^2\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

因而，在 $\mathrm{d}t$ 内沿 x^2 方向净流出控制体的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}})\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

同理，可得 $\mathrm{d}t$ 内沿 x^1、x^3 方向净流出控制体的流体质量为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\rho v_{逆}^1\sqrt{G_{11}})\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3}(\rho v_{逆}^3\sqrt{G_{33}})\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

于是，在 $\mathrm{d}t$ 内控制体中净流出质量为

$$\left[\frac{\partial(\rho v_{逆}^1\sqrt{G_{11}})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v_{逆}^3\sqrt{G_{33}})}{\partial x^3}\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

由于控制体的体积不变，所以流出一部分流体必将引起控制体内部密度的变化。假设控制体内密度的变化率为 $\frac{\partial\rho}{\partial t}$，则在 $\mathrm{d}t$ 内，控制体中流体质量的改变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \frac{\partial \rho}{\partial t}\sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}t$$

根据质量守恒定律，则有

$$\frac{\partial(\rho v_{逆}^1\sqrt{G_{11}})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v_{逆}^2\sqrt{G_{22}})}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v_{逆}^3\sqrt{G_{33}})}{\partial x^3} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\sqrt{g}$$

或（$v_{逆}^i\sqrt{g^{ii}} = v^i$）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}v_{逆}^i)}{\partial x^i} = 0 \tag{6.6.2a}$$

式(6.6.2a) 即为曲线坐标系下的**连续方程**。

6.6.2　微元控制体随流体运动

假定控制体随流体一起以相同速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，则控制体内的系统和控制体外的流体无相对运动，即没有流体质量进出控制体。根据质量守恒定律，应有

$$\frac{\mathrm{D}(\rho\mathrm{d}V)}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{6.6.3a}$$

或

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V + \rho\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{6.6.3b}$$

两端同除 $\mathrm{d}V$，得

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.6.4}$$

因为已知

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i}$$

且有式(6.3.3)、式(3.4.4)

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{d}V\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$$

所以式(6.6.4) 左边可以改写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \frac{\rho}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}v^i\frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho\frac{\partial(\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i}\right] \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

于是得到连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\rho\sqrt{g}v^i)}{\partial x^i} = 0 \tag{6.6.2b}$$

这一结果表明，用两种不同的方法得出同一方程。

6.7 以应力表示的运动微分方程

6.7.1 运动微分方程

在第五章中已讨论了一点应力的表达式

$$\boldsymbol{P}^n \mathrm{d}\sigma = \boldsymbol{P}^i \mathrm{d}S_i$$

式中，$\boldsymbol{P}^i$ 为作用于对应微元坐标曲面上的应力，$\mathrm{d}S_i$ 为该曲面的面积。已知

$$\mathrm{d}S_i = \frac{1}{2}\sqrt{g}\sqrt{g^{ii}}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\sqrt{G_{ii}}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k$$

于是

$$\boldsymbol{P}^i \mathrm{d}S_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^i\sqrt{g^{ii}}(\sqrt{g}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k)$$

应用以上结果，可推导出曲线坐标系下的运动微分方程。

设在流场中任取一点 o，以 o 点为角点、过 o 点之坐标曲线 $x^i = \mathrm{const}$ 以及 $x^i + \mathrm{d}x^i = \mathrm{const}$ 为斜棱边构成微元六面体，如图 6－3 所示，则过点 o 各对应的曲面面积，对所取的微元六面体而言，应为

$$\mathrm{d}S_i = \sqrt{g}\sqrt{g^{ii}}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k$$

$$p^i\sqrt{g^{ii}} = T^{ik}\boldsymbol{e}_k$$

而作用在对应曲面上的表面力分别为

$$-\boldsymbol{P}^1\sqrt{g}\sqrt{g^{11}}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

$$-\boldsymbol{P}^2\sqrt{g}\sqrt{g^{22}}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3$$

$$-\boldsymbol{P}^3\sqrt{g}\sqrt{g^{33}}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2 \qquad (6.7.1)$$

式中，$\boldsymbol{P}^i$ 为作用于对应面上的应力。

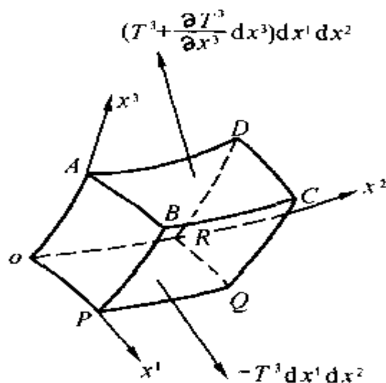


图 6－3 以应力表示运动微分方程

为讨论方便，令

$$\boldsymbol{P}^i\sqrt{g^{ii}} = T^{ik}\boldsymbol{e}_k \qquad (6.7.2)$$

即 T^{ik} 作为 $\boldsymbol{P}^i\sqrt{g^{ii}}$ 的逆变分量，于是

$$\boldsymbol{P}^i = \frac{T^{ik}}{\sqrt{g^{ii}}}\boldsymbol{e}_k \qquad (6.7.3)$$

再令 P^{ik} 为 $\boldsymbol{P}^i$ 的可分解分量的绝对值，则由上式

$$\boldsymbol{P}^i = \frac{T^{ik}}{\sqrt{g^{ii}}}\sqrt{g_{kk}}\boldsymbol{l}_k = P^{ik}\boldsymbol{l}_k$$

得

$$P^{ik} = \sqrt{\frac{g_{kk}}{g^{ii}}}T^{ik} \qquad (6.7.4)$$

为使表面力的表示形式和笛卡尔坐标相一致，再令

$$\boldsymbol{T}^i = \boldsymbol{P}^i\sqrt{g}\sqrt{g^{ii}} = \sqrt{g}T^{ik}\boldsymbol{e}_k \tag{6.7.5}$$

于是诸表面力可改写成

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{T}^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\&-\boldsymbol{T}^2\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3\\&-\boldsymbol{T}^3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\end{aligned} \tag{6.7.6}$$

而作用在六个面上的表面力之合力应为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\boldsymbol{T}^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\boldsymbol{T}^2) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\boldsymbol{T}^3)\right]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{6.7.7}$$

令作用在微元流体上的质量力为

$$\rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}V = \rho\boldsymbol{f}\sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{6.7.8}$$

根据牛顿第二运动定律,可得

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\boldsymbol{T}^i)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + \rho\sqrt{g}\boldsymbol{f}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \rho\sqrt{g}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i} + \rho\sqrt{g}\boldsymbol{f} = \rho\sqrt{g}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} \tag{6.7.9}$$

式中,$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}$ 为加速度。

由于

$$\boldsymbol{T}^i = \sqrt{g}T^{ik}\boldsymbol{e}_k$$

因而

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i} = T^{ik}\boldsymbol{e}_k\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}) + \sqrt{g}\boldsymbol{e}_k\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} + \sqrt{g}T^{ik}\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x^i}$$

因为由式(3.2.12) 和式(3.2.1)

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \Gamma^p_{pi}\sqrt{g}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial x^i} = \Gamma^j_{ik}\boldsymbol{e}_j$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^i}{\partial x^i} = \sqrt{g}\boldsymbol{e}_k\left(\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{pi}T^{ik} + \Gamma^k_{ij}T^{ij}\right)$$

由于

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ip}T^{ik} + T^{ij}\Gamma^k_{ij} = \nabla_i T^{ik}$$

所以可得任意曲线坐标系下的**运动微分方程**为

$$\nabla_i T^{ik} + \rho f^k = \rho a^k \tag{6.7.10a}$$

又因为

$$\nabla_i T^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}T^{ik}) + \Gamma^k_{ij}T^{ij}$$

则式(6.7.10a) 又可改写成

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}T^{ik}) + T^{ij}\Gamma^k_{ij} + \rho f^k = \rho a^k \tag{6.7.10b}$$

对于正交的曲线坐标系，由于可分解分量即为物理分量，且

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$$

因此，物理分量 P^{ik}，$f(k)$，$a(k)$ 可分别表示成

$$P_{ik} = P^{ik} = \sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}}T^{ik}$$

$$f(k) = \sqrt{g_{kk}}f^k$$

$$a(k) = \sqrt{g_{kk}}a^k$$

代入式(6.7.10b)即可得正交曲线坐标系下的运动微分方程为

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{P_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}}\sqrt{g}\right] + \Gamma^k_{ij}\frac{P_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} + \rho\frac{f(k)}{\sqrt{g_{kk}}} = \rho\frac{a(k)}{\sqrt{g_{kk}}} \tag{6.7.11}$$

6.7.2 圆柱坐标系下的运动微分方程

在圆柱坐标系下，式(6.7.11)可以改写成

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{P_{rr}}{\sqrt{g_{rr}g_{rr}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{P_{\varphi r}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_{zr}}{\sqrt{g_{zz}g_{rr}}}r\right]\right\} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\frac{P_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi}}} + \rho\frac{f(r)}{\sqrt{g_{rr}}} = \rho\frac{a(r)}{\sqrt{g_{rr}}}$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{P_{r\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{P_{\varphi\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_{z\varphi}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{zz}}}r\right]\right\} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\frac{P_{\varphi r}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{rr}}}$$

$$+ \Gamma^\varphi_{r\varphi}\frac{P_{r\varphi}}{\sqrt{g_{rr}g_{\varphi\varphi}}} + \rho\frac{f(\varphi)}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}} = \rho\frac{a(\varphi)}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{P_{rz}}{\sqrt{g_{rr}g_{zz}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{P_{\varphi z}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{zz}}}r\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_{zz}}{\sqrt{g_{zz}g_{zz}}}r\right]\right\} + \rho\frac{f(z)}{\sqrt{g_{zz}}} = \rho\frac{a(z)}{\sqrt{g_{zz}}}$$

由于

$$\sqrt{g_{rr}} = 1, \sqrt{g_{\varphi\varphi}} = r, \sqrt{g_{zz}} = 1, \sqrt{g} = r$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}$$

所以上式可写成

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(P_{\varphi r}) + \frac{\partial}{\partial z}(rP_{zr})\right] - r\frac{P_{\varphi\varphi}}{r^2} + \rho f(r) = a(r)$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(P_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P_{\varphi\varphi}}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(P_{z\varphi})\right] + \frac{P_{\varphi r}}{r^2} + \frac{P_{r\varphi}}{r^2} + \rho\frac{f(\varphi)}{r} = \rho\frac{a(\varphi)}{r}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rP_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(P_{\varphi z}) + \frac{\partial}{\partial z}(rP_{zz})\right] + \rho f(z) = \rho a(z)$$

并因为加速度为

$$a(r) = \frac{D^2 r}{Dt^2} - \frac{1}{r}v_\varphi^2$$

$$a(\varphi) = \frac{D^2\varphi}{Dt^2} + \frac{2v_r v_\varphi}{r}$$

$$a(z)=\frac{\mathrm{D}^2 z}{\mathrm{D}t^2}$$

而由切应力互等定理

$$P_{r\varphi}=P_{\varphi r}$$

所以最后得到圆柱坐标系下的运动微分方程为

$$\rho\left[\frac{\mathrm{D}^2 r}{\mathrm{D}t^2}-\frac{v_\varphi^2}{r}\right]=\rho f(r)+\frac{\partial P_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial P_{\varphi r}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial P_{zr}}{\partial z}+\frac{P_{rr}-P_{\varphi\varphi}}{r}$$

$$\rho\left[\frac{\mathrm{D}^2\varphi}{\mathrm{D}t^2}+\frac{2v_r v_\varphi}{r}\right]=\rho f(\varphi)+\frac{\partial P_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial}{r\partial\varphi}(P_{\varphi\varphi})+\frac{\partial}{\partial z}P_{z\varphi}+\frac{2P_{r\varphi}}{r}$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}^2 z}{\mathrm{D}t^2}=\rho f(z)+\frac{\partial P_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial P_{\varphi z}}{r\partial\varphi}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\tag{6.7.12}$$

6.7.3 球坐标系下的运动微分方程

对于球坐标系,也可以完全类似地求得运动微分方程为

$$\rho a(R)=\frac{\partial P_{RR}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial P_{\theta R}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial P_{\varphi R}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}[2P_{RR}-P_{\theta\theta}-P_{\varphi\varphi}+P_{\theta R}\cot\varphi]+\rho f(R)$$

$$\rho a(\theta)=\frac{\partial P_{R\theta}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial P_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}[2P_{R\theta}+P_{\theta R}+(P_{\theta\theta}-P_{\varphi\varphi}\cot\theta]+\rho f(\theta)$$

$$\rho a(\varphi)=\frac{\partial P_{R\varphi}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial P_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R}[2P_{R\varphi}+P_{\varphi R}+P_{\theta\varphi}\cot\theta]+\rho f(\varphi)$$

$$\tag{6.7.13}$$

*6.8 有势流动·势函数及其性质·势函数方程

6.8.1 有势流动及势函数

首先定义有势流动。如果对整个流场满足

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}=0$$

则称此流场为**无旋(或有势)场**,而这种流动称为**有势流动**。

因为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

所以根据零矢量的定义,对于有势流动,必有

$$\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}=0\tag{6.8.1a}$$

成立,或写成

$$\frac{\partial v_j}{\partial x^i}=\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\tag{6.8.1b}$$

从数学分析知道，要使 v_i 为某一函数 ϕ 对坐标的偏导数，即

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}$$

$$v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x^2}$$

$$v_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$

则式(6.8.1b) 是它的充要条件。

由于 $v_i = v_i(x^1, x^2, x^3, t)$，因而 ϕ 也是 x^i, t 的函数，在这种情况下，微分三项式

$$v_1 \mathrm{d}x^1 + v_2 \mathrm{d}x^2 + v_3 \mathrm{d}x^3$$

可认为是 ϕ 函数的全微分. 即

$$v_1 \mathrm{d}x^1 + v_2 \mathrm{d}x^2 + v_3 \mathrm{d}x^3 = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}\phi$$

即对于无旋流动，有

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\mathrm{d}\phi = v_i \mathrm{d}x^i$$

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i = \nabla \phi \tag{6.8.2}$$

上式表明，对于有势流动一定存在**势函数 $\boldsymbol{\phi}$**，其对坐标 x^i 的偏导数等于速度在该方向的协变分量。

不仅如此，在笛卡尔坐标系下，速度势 ϕ 对任意方向 $\boldsymbol{S}$ 的偏导数(即所谓**方向导数**)就是速度 $\boldsymbol{v}$ 在该方向的投影，这一结论对曲线坐标系也同样正确，下面就来证明这一性质。

由于

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \phi}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}s}\right)$$

式中应用了

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}$$

$$\frac{\partial x^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\mathrm{d}s}$$

因为

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta_j^k$$

所以

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial y^k}\delta_j^k \frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \phi}{\partial y^k}\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}$$

对于笛卡尔坐标系 $\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s}$ 应是单位矢量 $\boldsymbol{S}$ 方向在 $\boldsymbol{k}$ 坐标轴方向的投影，即

$$\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}s} = (\boldsymbol{s})_k = s_k$$

至于 $\frac{\partial \phi}{\partial y^k}$ 正好就是速度 $\boldsymbol{v}$ 在笛卡尔坐标系下 $\boldsymbol{k}$ 坐标轴的投影分量，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^k} = (\boldsymbol{v})_k = v_k$$

所以

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s} = v_s \tag{6.8.3}$$

由此得证。

6.8.2 势函数方程

在定常运动的条件下，连续方程可写成

$$\mathrm{div}\rho \boldsymbol{v} = \rho \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}\, \rho = \rho \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} v^k) + v^k \frac{\partial \rho}{\partial x^k} = 0 \tag{6.8.4}$$

而运动方程为

$$\mathrm{d}p + \rho v \mathrm{d}v = 0 \tag{6.8.5}$$

音速方程为

$$a^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{6.8.6}$$

应用以上方程，可得

$$\mathrm{d}\rho = -\frac{\rho}{a^2}\mathrm{d}\left(\frac{g^{ij}}{2} v_i v_j\right) = -\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij} v_i v_j)\mathrm{d}x^k$$

但

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{6.8.7}$$

所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k = -\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij} v_i v_j)\mathrm{d}x^k$$

即

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^k} = -\frac{\rho}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij} v_i v_j) \tag{6.8.8}$$

把它代入(6.8.4)，得

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} v^k) - v^k\left[\frac{1}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij} v_i v_j)\right] = 0 \tag{6.8.9}$$

如将上式中逆变分量改写成逆变物理分量，则

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}\sqrt{g^{kk}} v^k_{逆}) - \frac{\sqrt{g^{kk}} v^k_{逆}}{2a^2}\frac{\partial}{\partial x^k}(g^{ij}\sqrt{g_{ii}g_{jj}} v_{逆i} v_{逆j}) = 0 \tag{6.8.10}$$

如以

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$v_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

$$v^k = g^{ki}\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

代入式(6.8.9)，即可求得曲线坐标系下的**势函数方程**。

作为一个例子,我们来看看圆柱坐标系下的势函数方程。

对于圆柱坐标系,有

$$x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z, \sqrt{g} = r$$

$$\sqrt{g_{11}} = 1, \sqrt{g_{22}} = r, \sqrt{g_{33}} = 1$$

$$\sqrt{g^{11}} = 1, \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r}, \sqrt{g^{33}} = 1$$

代入式(6.8.10),得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{逆r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v_{逆\varphi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rv_{逆z}) - \frac{v_{逆r}}{2a^2}\frac{\partial}{\partial r}(v_{逆r}^2 + v_{逆\varphi}^2 + v_{逆z}^2)$$
$$- \frac{1}{2a^2 r}v_{逆\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(v_{逆r}^2 + v_{逆\varphi}^2 + v_{逆z}^2) - \frac{1}{2a^2}v_{逆z}\frac{\partial}{\partial z}(v_{逆r}^2 + v_{逆\varphi}^2 + v_{逆z}^2) = 0$$

令

$$v_{逆r} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$v_{逆\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

$$v_{逆z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

或

$$v_{逆r} = \phi_r$$

$$v_{逆\varphi} = \frac{1}{r}\phi_\varphi$$

$$v_{逆z} = \phi_z$$

则

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\phi_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_z) - \frac{1}{2a^2}\phi_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\phi_\varphi^2 + \phi_z^2\right)$$
$$- \frac{1}{2a^2 r^2}\phi_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\phi_\varphi^2 + \phi_z^2\right) - \frac{1}{2a^2}\phi_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi_r^2 + \frac{1}{r^2}\phi_\varphi^2 + \phi_z^2\right) = 0$$

展开之,得

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\varphi\varphi} + \phi_{zz} - \frac{\phi_r^2}{a^2}\phi_{rr} - \frac{1}{a^2 r^2}\phi_r\phi_\varphi\phi_{r\varphi} + \frac{1}{a^2 r^3}\phi_\varphi^2\phi_r$$
$$- \frac{1}{a^2}\phi_r\phi_z\phi_{rz} - \frac{1}{a^2 r^2}\phi_\varphi\phi_r\phi_{r\varphi} - \frac{1}{a^2 r^4}\phi_\varphi^2\phi_{\varphi\varphi} - \frac{1}{a^2 r^2}\phi_\varphi\phi_z\phi_{z\varphi}$$
$$- \frac{1}{a^2}\phi_z\phi_r\phi_{zr} - \frac{1}{a^2 r^2}\phi_z\phi_\varphi\phi_{z\varphi} - \frac{1}{a^2}\phi_z^2\phi_{zz} = 0$$

经整理后可得圆柱坐标系下的势函数方程为

$$\left(1 - \frac{\phi_r^2}{a^2}\right)\phi_{rr} + \left(1 - \frac{\phi_\varphi^2}{a^2 r^2}\right)\frac{\phi_{\varphi\varphi}}{r^2} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right)\phi_{zz} - \frac{2\phi_\varphi\phi_r}{a^2 r^2}\phi_{\varphi r}$$
$$- \frac{2\phi_\varphi\phi_z}{a^2 r^2}\phi_{\varphi z} - \frac{2\phi_r\phi_z}{a^2}\phi_{rz} + \frac{\phi_r}{r}\left(1 + \frac{\phi_\varphi^2}{a^2 r^2}\right) = 0 \tag{6.8.11}$$

*6.9 流函数及流函数方程

6.9.1 流函数的定义

在二元、定常流动中,无论是可压缩或不可压缩流体均存在流函数 Ψ。由二元、定常可压缩流动的连续方程

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\sqrt{g}v^i) = 0 \tag{6.9.1a}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\rho\sqrt{g}v^1) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\rho\sqrt{g}v^2) = 0 \tag{6.9.1b}$$

如令(ρ_0 为不可压缩流体的密度)

$$v^1 = \frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial\Psi}{\partial x^2} \tag{6.9.2}$$

$$v^2 = -\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\frac{\partial\Psi}{\partial x^1} \tag{6.9.3}$$

则上式满足连续方程式(6.9.1)。为了讨论方便,可将 α,β 作为二元流动的下标,于是

$$v^\alpha = \frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\varepsilon_{\alpha\beta3}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta} \tag{6.9.4a}$$

或

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta3}\left(\frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_0}\right)v^\alpha \tag{6.9.4b}$$

式中,α,β 均取 1,2。

式(6.9.4) 即为可压缩流体的二元定常流动的流函数 Ψ 定义式。

6.9.2 流函数的性质

流函数 Ψ 有两个重要性质。

1.令 $\Psi = \text{const}$,则此曲线即为流线

由

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta \tag{6.9.5}$$

将式(6.9.4) 代入式(6.9.5),则

$$\mathrm{d}\Psi = \left(\frac{\rho\sqrt{g}}{\rho_0}\right)(\varepsilon_{\alpha\beta3})v^\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{6.9.6}$$

由流线方程,可得

$$\varepsilon_{\alpha\beta3}v^\alpha\mathrm{d}x^\beta = 0$$

代入式(6.9.6) 得

$$\mathrm{d}\Psi = 0$$

即

$$\Psi = \text{const}$$

由此得证。

2.过两点间的质量流量等于 ρ_0 乘以该两点流函数 Ψ 之差。

设在流线 $\Psi = C_P, \Psi = C_R$ 上任意取两点 P, R(如图6-4),然后在 P,R 两点的连线上取一点 C,作沿 PR 连线的微元位置矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P$,并假设 C 点的速度为 $\boldsymbol{v}$,于是过微元弧段 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P|$ 的质量流量应是

$$\mathrm{d}Q = \rho|\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_P| = \rho\varepsilon_{\alpha\beta3} v^\alpha \mathrm{d}x^\beta \sqrt{g}\sqrt{g^{33}}$$

对于二元情况,因为

$$g^{33} = 1$$

所以

$$\mathrm{d}Q = \rho\varepsilon_{\alpha\beta3} v^\alpha \mathrm{d}x^\beta \sqrt{g}$$

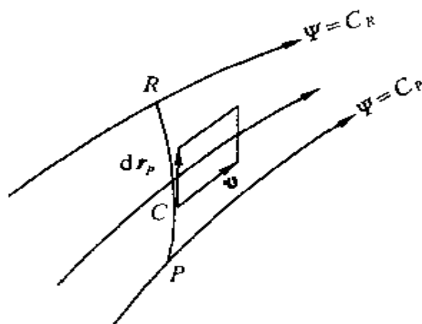


图6-4 流函数性质

由式(6.9.4)知

$$\rho\sqrt{g}\varepsilon_{\alpha\beta3} v^\alpha = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta}$$

代入上式,得

$$\mathrm{d}Q = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta = \rho_0 \mathrm{d}\Psi$$

于是

$$Q = \int_P^R \mathrm{d}Q = \rho_0 \int_P^R \mathrm{d}\Psi = \rho_0(C_R - C_P) \tag{6.9.7}$$

由此得证。

6.9.3 定常不可压缩流体无旋流动的流函数方程

对于不可压缩流体,$\rho = \rho_0$,因而由连续方程式(6.9.4a)

$$v^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta3} \frac{1}{\sqrt{g}} \Psi_{,\beta} \tag{6.9.8}$$

再加上无旋条件

$$\varepsilon_{\nu\mu3} v_{\nu,\mu} = 0 \tag{6.9.9}$$

及

$$v_\nu = g_{\nu\alpha} v^\alpha$$

所以

$$v_\nu = g_{\nu\alpha} v^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta3}\left(g_{\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{g}} \Psi_{,\beta}\right)$$

把上式代入式(6.9.9),得

$$\varepsilon_{\nu\mu3}\left(\varepsilon_{\alpha\beta3} g_{\nu\alpha} \frac{1}{\sqrt{g}} \Psi_{,\beta}\right)_{,\mu} = 0 \tag{6.9.10}$$

因为由式(2.1.19)知

$$\varepsilon_{\nu\mu 3}\varepsilon_{\alpha\beta 3} = \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha}$$

代入式(6.9.10)得

$$\left[(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha}) \frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta} \right]_{,\mu} = 0 \tag{6.9.11a}$$

或

$$\left(\frac{g_{\nu\nu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\mu} - \frac{g_{\nu\mu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\nu} \right)_{,\mu} = 0 \tag{6.9.11b}$$

将上式展开,得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{g_{1\mu}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{g_{2\mu}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} \right) = 0$$

进一步展开上式

$$\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} \right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} - \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} \right) = 0$$

最后整理得

$$\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x^{1}}\left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{1}} \right) \right] = 0 \tag{6.9.12}$$

式(6.9.12)即为定常、二元不可压缩流体无旋流动的流函数方程。

对于圆柱坐标系,则由

$$g_{11} = 1$$
$$g_{22} = r^2$$
$$\sqrt{g} = r$$
$$g_{12} = g_{21} = 0$$

代入式(6.9.12),可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) = 0 \tag{6.9.13a}$$

或

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \tag{6.9.13b}$$

对于笛卡尔坐标系,则可得

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.9.14}$$

6.9.4 定常、可压缩无旋流动的流函数方程

对于无旋、可压缩流体的定常流动,可根据连续方程式(6.9.4a)

$$v^{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta 3}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}$$

又

$$v_{\nu} = g_{\nu\alpha}v^{\alpha}$$

所以

$$v_\nu = \epsilon_{\alpha\beta3} \frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}} g_{\nu\alpha} \Psi_{,\beta} \tag{6.9.15}$$

由无旋条件

$$\epsilon_{\nu\mu3} v_{\nu,\mu} = 0 \tag{6.9.16}$$

把式(6.9.15) 代入式(6.9.16) 得

$$\epsilon_{\nu\mu3}\left(\epsilon_{\alpha\beta3} \frac{g_{\nu\alpha}}{\rho\sqrt{g}} \Psi_{,\beta}\right)_{,\mu} = 0$$

展开得

$$\frac{1}{\rho}\epsilon_{\nu\mu3}\epsilon_{\alpha\beta3}\left[\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}\right)_{,\mu} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}\right)\rho_{,\mu}\right] = 0$$

或

$$(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}\right)_{,\mu} - \frac{1}{\rho}(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha})\left(\frac{g_{\nu\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}\right)\rho_{,\mu} = 0$$

再进一步展开,得

$$\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\mu}\right)_{,\mu} - \left(\frac{g_{\nu\mu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\nu}\right)_{,\mu} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\mu} - \frac{g_{\nu\mu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\nu}\right)\rho_{,\mu} = 0 \tag{6.9.17}$$

式(6.9.17) 中的 $\rho_{,\mu}$ 还须应用基本方程作适当处理后再消去。

由运动微分方程

$$\mathrm{d}p = -\rho v \mathrm{d}v$$

音速方程

$$\mathrm{d}p = a^2 \mathrm{d}\rho$$

所以

$$\mathrm{d}\rho = -\frac{\rho}{a^2}\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

故有

$$\rho_{,\mu} = -\frac{\rho}{a^2}\left(\frac{v^2}{2}\right)_{,\mu} \tag{6.9.18}$$

但

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(v^\alpha v_\alpha) = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\alpha\beta3}\frac{\rho_0}{\rho\sqrt{g}}\Psi_{,\beta}g_{\alpha\lambda}v^\lambda\right) = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta3}\epsilon_{\lambda\theta3}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}g_{\alpha\lambda}\Psi_{,\beta}\Psi_{,\theta}\right) \tag{6.9.19}$$

将式(6.9.19) 代入式(6.9.18),得

$$\rho_{,\mu} = -\frac{\rho}{2a^2}\epsilon_{\alpha\beta3}\epsilon_{\lambda\theta3}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}g_{\alpha\lambda}\Psi_{,\beta}\Psi_{,\theta}\right)_{,\mu}$$

展开之,得

$$\rho_{,\mu} = -\frac{\rho}{2a^2}\epsilon_{\alpha\beta3}\epsilon_{\lambda\theta3}\left[\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\left(\frac{g_{\alpha\lambda}}{g}\Psi_{,\beta}\Psi_{,\theta}\right)_{,\mu} + \left(\frac{\rho_0^2}{g}g_{\alpha\lambda}\Psi_{,\beta}\Psi_{,\theta}\right)\left(-\frac{2}{\rho^3}\right)\rho_{,\mu}\right] \tag{6.9.20a}$$

或

$$\rho_{,\mu} = -\frac{\rho_0^2}{2a^2\rho^2}\frac{\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\Psi_{,\theta}^2 - \frac{g_{\theta\lambda}}{g}\Psi_{,\lambda}\Psi_{,\theta}\right)}{\left[1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\Psi_{,\theta}^2 - \frac{g_{\theta\lambda}}{g}\Psi_{,\lambda}\Psi_{,\theta}\right)\right]} \tag{6.9.20b}$$

将式(6.9.20b)代入式(6.9.17),得

$$\left(\frac{g_{\nu\nu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\nu}\right)_{,\mu}+\frac{\rho_0^2}{2a^2\rho^2}\frac{\left(\frac{g_{\nu\nu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\mu}-\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\Psi_{,\nu}\right)\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\Psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\Psi_{,\lambda}\Psi_{,\theta}\right)}{\left[1-\frac{\rho_0^2}{\rho^2 g}\left(\frac{g_{\lambda\lambda}}{g}\Psi_{,\theta}^2-\frac{g_{\theta\lambda}}{g}\Psi_{,\lambda}\Psi_{,\theta}\right)\right]}=0 \tag{6.9.21}$$

特别地,对圆柱坐标系,则可令

$$x^1=r,\quad x^2=z$$

即轴对称情形,此时有

$$g_{11}=1,g_{22}=1,g_{12}=g_{21}=0,g=r^2$$

$$\Psi_{,1}=\Psi_{,r},\Psi_{,2}=\Psi_{,z}$$

代入式(6.9.21)并经一番整理,可得轴对称、无旋流动的流函数方程为

$$\left(1-\frac{\rho_0^2}{r^2a^2\rho^2}\Psi_{,z}^2\right)\Psi_{,rr}+\left(1-\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\Psi_{,r}^2\right)\Psi_{,zz}+2\frac{\rho_0^2}{r^2\rho^2a^2}\Psi_{,r}\Psi_{,z}\Psi_{,rz}-\frac{\Psi_{,r}}{r}=0 \tag{6.9.22}$$

参考答案

习 题 一

1.1 (a) $a_{ij}x^ix^j = a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^2x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + a_{23}x^2x^3 + a_{31}x^3x^1 + a_{32}x^3x^2 + a_{33}x^3x^3$

(b) $a_i^{\cdot i}x_jx^j = (a_1^{\cdot 1} + a_2^{\cdot 2} + a_3^{\cdot 3})(x_1x^1 + x_2x^2 + x_3x^3)$

(c) $(a_ix^i)^2 = (a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3)^2$

1.2 (a) a_j 矢量

(b) $(a_1a^1 + a_2a^2 + a_3a^3)a_j$ 矢量

(c) $A_{j\cdot l}^{\cdot j}$ 矢量

(d) $A_{ik}A^{ik}$ 标量

1.3 (a) $\boldsymbol{g}^1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$

$\boldsymbol{g}^3 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$

(b) $5\sqrt{2}$

1.4 (a) $a^1 = -1, a^2 = -2, a^3 = \frac{16}{3}$

(b) $a^1 = -3, a^2 = -4, a^3 = \frac{37}{3}$

(c) $a_1 = 3, a_2 = -3, a_3 = 0$

(d) $a_1 = 13, a_2 = 16, a_3 = 9$

1.5 (1) 圆柱坐标系

(a) $\boldsymbol{g}_1 = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{g}_2 = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{k}$

(b) $\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{g}_3$

(2) 球坐标系

(a) $\boldsymbol{g}_1 = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{g}_2 = r\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} - r\sin\theta\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{g}_3 = -r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j}$

(b) $\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}^2 = \frac{1}{r^2}\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}^3 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\boldsymbol{g}_3$

1.6

$$\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.7

$$\begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{1'}^{2} & \beta_{1'}^{3} \\ \beta_{2'}^{1} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{2'}^{3} \\ \beta_{3'}^{1} & \beta_{3'}^{2} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{1}^{1'} & \beta_{1}^{2'} & \beta_{1}^{3'} \\ \beta_{2}^{1'} & \beta_{2}^{2'} & \beta_{2}^{3'} \\ \beta_{3}^{1'} & \beta_{3}^{2'} & \beta_{3}^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

1.8 $v' = \cos\theta v^{1'} + \sin\theta v^{2'}$

$v^2 = -\frac{1}{r}\sin\theta v^{1'} + \frac{1}{r}\cos\theta v^{2'}$

$v^3 = v^{3'}$

1.9 $v^1 = \sin\theta\cos\varphi v^{1'} + \sin\theta\sin\varphi v^{2'} + \cos\theta v^{3'}$

$v^2 = r\cos\theta\cos\varphi v^{1'} + r\cos\theta\sin\varphi v^{2'} - r\sin\theta v^{3'}$

$v^3 = -r\sin\theta\sin\varphi v^{1'} + r\sin\theta\cos\varphi v^{2'}$

1.10 $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, g_{ij} = 1(i \neq j)$

$g^{11} = g^{22} = g^{33} = \frac{3}{4}, g^{ij} = -\frac{1}{4}(i \neq j)$

1.13

$$T^{i}_{\cdot j} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 8 & 14 & 20 \\ 11 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$T_{i}^{\cdot j} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 7 & 14 & 18 \\ 12 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

习 题 二

2.1 (a)

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $v_1' = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$

$v_2' = -v_1\sin\theta + v_2\cos\theta$

$v_3' = v_3$

(c) $\boldsymbol{D} = (2+\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2' + (2+\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2'$

$- \sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2' - \sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_1'$

$- \sin\theta\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_3' - \cos\theta\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3' + 5\boldsymbol{e}_3'\boldsymbol{e}_3'$

2.3 (a)3

(b)3

(c)3

(d)0

(e) -6

2.6 (a)$[9 \quad -20 \quad 6]$

(b)$[-12 \quad -8 \quad -10]$

(c) -76

2.7 (a) $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F} = 12\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + 15\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - 15\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$

$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D} = 20\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + 12\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - 6\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + 8\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$

(b) $\boldsymbol{D}:\boldsymbol{F} = 17$

$\boldsymbol{D}:\boldsymbol{F} = 20$

2.13 $\mathrm{I}_{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\mathrm{II}_{ab} = 0$

$\mathrm{III}_{ab} = 0$

2.14 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 12$

$$\boldsymbol{e}_1^* = \pm\left(\frac{-3\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{4\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{e}_3\right)$$

$$\boldsymbol{e}_2^* = \pm\left(\frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1 - \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_3\right)$$

$$\boldsymbol{e}_3^* = \pm\left(-\frac{3\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{4\sqrt{2}}{10}\boldsymbol{e}_3\right)$$

2.15 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 16$

$$\boldsymbol{e}_1^* = \pm\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e}_2^* = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$$

$$\boldsymbol{e}_3^* = \mp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2\right)$$

2.20 $\boldsymbol{Q} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$

$$U = \frac{7}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

$$V = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

习 题 三

3.1 见本章式(3.8.12)

3.2 见本章式(3.8.22)

习 题 四

4.3

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$a_\varphi = r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta$$

4.4 (2) $\theta = \arccos\frac{g}{l\dot{\varphi}^2}$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

习 题 五

5.1 (a) $\boldsymbol{t}^{(n)} = 4\boldsymbol{e}^1 - \frac{10}{3}\boldsymbol{e}^2$

(b) $\frac{44}{9}$

(c) $\cos\theta = 0.94$

5.2 $\sigma_{22} = 1$

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$$

5.3 $a = b = c = -\frac{1}{2}$

5.4

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

5.5 $\rho b_1 = -13x_2$

$\rho b_2 = -2$

$\rho b_3 = 0$

5.6 (a)$\sigma_{(1)} = 2, \quad \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = -1$

(b)$\sigma_{(1)} = 4, \quad \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)} = 1$

5.7 $\sigma_{(1)} = 3, \quad \sigma_{(2)} = 8, \quad \sigma_{(3)} = 9$

$\mathrm{I}_\Sigma = 20, \quad \mathrm{II}_\Sigma = 123, \quad \mathrm{III}_\Sigma = 216$

5.8 $S_{(1)} = 31, \quad S_{(2)} = 8, \quad S_{(3)} = -39$

5.9 (b) 两个应力矢量分别为

$$\frac{c}{3}(14\boldsymbol{e}_1 + 18\boldsymbol{e}_2 - 8\boldsymbol{e}_3)$$

$$\frac{c}{9}(-28\boldsymbol{e}_1 + 16\boldsymbol{e}_3)$$

(c) $\sigma_{(1)} = \sqrt{65}c, \sigma_{(2)} = 0, \sigma_{(3)} = -\sqrt{65}c$

$(\sigma_3)_{\max} = \sqrt{65}c$;主偏应力与主应力同。

5.10 $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_3$

5.11 连接两点的矢量在位移后的矢量是

$8\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 + 25\boldsymbol{e}_3$

5.12 (a)$\boldsymbol{n} = \dfrac{\sqrt{26}}{52}(7\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$

(b)$\lambda_{(\boldsymbol{n})} = \sqrt{\dfrac{13}{6}}$

5.13 $\lambda_{(-\boldsymbol{e}_2)} = \sqrt{21}$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-1, -2, 4)$$

5.14 $n_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, n_3 = \mp\dfrac{1}{2}$ 或 $n_2 = 0, n_3 = \pm 1$

5.15

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \xi_3^2 & 0 & 2\xi_1\xi_3 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\xi_3 & \xi_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \xi_3^2 - 1 & 0 & 2\xi_1\xi_3 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 - 1 & 0 \\ 0 & 2\xi_2\xi_3 & \xi_2^2 - 1 \end{bmatrix}$$

5.16

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1 + A^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix}$$

5.17

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -8 & -2 & 4 \\ 4 & -12 & 2 \\ 2 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{64}{169}\begin{bmatrix} 21 & -11 & -12 \\ -11 & 46 & 10 \\ -12 & 10 & 41 \end{bmatrix}$$

5.18

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{QU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}$$

5.19

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{e}_1$$

5.20 $-\frac{6}{81}$

5.21 0.006, 0

5.22 $\mathrm{I}_E = 0.006$

$\mathrm{II}_E = -4 \times 10^{-6}$

$\mathrm{III}_E = -24 \times 10^{-9}$

5.23 $\varepsilon_{(1)} = 8$, $\varepsilon_{(2)} = 4$, $\varepsilon_{(3)} = 3$

$e_{(1)} = 3$, $e_{(2)} = -1$, $e_{(3)} = -2$

参考文献

1.郭仲衡.非线性弹性理论.北京:科学出版社,1980
2.郭仲衡.张量(理论和应用).北京:科学出版社,1988
3.黄克智,薛明德,陆明万.张量分析.北京:清华大学出版社,2003
4.戴天民.张量和连续介质力学.沈阳:辽宁大学出版社,1986
5.周季生.张量初步.北京:高等教育出版社,1985
6.钱曙复,陆林生.三维欧氏空间张量分析.上海:同济大学出版社,1997
7.冯潮清,赵愉深,何浩法.矢量与张量分析.北京:国防工业出版社,1986
8.李灏,陈树坚.连续体力学.武汉:华中工学院出版社,1982